第十四章 线性动态电路的复频域分析

●重点

（1） 拉普拉斯变换的基本原理和性质

（2） 掌握用拉普拉斯变换分析线性电路的方法和步骤

（3） 电路的时域分析变换到频域分析的原理

14.1 拉普拉斯变换的定义

1. 拉氏变换法

拉氏变换法是一种数学积分变换，其核心是把时域函数 $f(t)$ 与频域函数 **F(s)** 联系起来，把时域问题通过数学变换为频域问题，把时域的高阶微分方程变换为频域的代数方程以便求解。

拉氏变换：

对应

时域函数 $f(t)$(原函数) $\Longleftrightarrow$ 频域函数 **F(s)**(象函数)

例　熟悉的变换

对数变换　把乘法运算变换为对数加法运算

$$A \times B = AB$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow$$

$$\lg A + \lg B = \lg AB$$

相量法　把时域的正弦运算变换为复数运算

正弦量　$i_1 + i_2 = i$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad = \uparrow$$

相量　$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}$

2. 拉氏变换的定义

一个定义在 $[0,\infty)$区间的函数$f(t)$ 的拉普拉斯变换式定义为

$$F(s)=\int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

正变换

s为复数　　$s=\sigma+j\omega$

$F(s)$称为$f(t)$的象函数，$f(t)$称为$F(s)$的原函数。

$$F(\mathrm{s}) = \int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

正变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mathrm{s}) e^{st} ds$$

反变换

简写
$$\begin{cases} F(s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right] \\ f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right] \end{cases}$$

正变换

反变换

应用拉氏变换进行电路分析的方法称为电路的复频域分析法，又称运算法。

简写 $\begin{cases} F(s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right] \\ f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right] \end{cases}$

正变换

反变换

注

① $F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0_-}^{0_+} f(t)e^{-st}dt + \int_{0_+}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

在t＝0_-至t＝0_+ $f(t)=\delta(t)$时此项 $\neq 0$

② 象函数$F(\mathrm{s})$用大写字母表示, 如 ***I*(s)**，***U*(s)**。

原函数***f*(t)** 用小写字母表示，如 ***i*(t)**, ***u*(t)**。

③ 象函数F(s) 存在的条件：

$\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ 为有限值 e^{-st}为收敛因子

如果存在有限常数M和c使函数$f(t)$满足：

$$|f(t)| \le Me^{ct} \quad t \in [0, \infty]$$

总可以找到一个合适的s值使上式积分为有限值，即$f(t)$的拉氏变换式F(s)总存在。

3. 典型函数的拉氏变换

$$F(s)=\int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

(1) 单位阶跃函数的象函数

$$f(t)=\varepsilon(t)$$

$$F(s)=\mathscr{L}[\varepsilon(t)]=\int_{0_-}^{\infty}\varepsilon(t)e^{-st}dt \quad =\int_{0_-}^{\infty}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty} \quad =\frac{1}{s}$$

(2) 单位冲激函数的象函数

$$f(t)=\delta(t)$$

$$F(s)=\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_{0_-}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=\int_{0_-}^{0^+}\delta(t)e^{-st}dt=e^{-s0}=1$$

(3) 指数函数的象函数

$$f(t)=e^{\alpha t}$$

$$F(s)=\mathscr{L}\left[e^{\alpha t}\right]=\int_{0_-}^{\infty}e^{\alpha t}e^{-st}dt=-\frac{1}{s+\alpha}e^{-(s-\alpha)t}\Big|_{0_-}^{\infty}=\frac{1}{s-\alpha}$$

14.2 拉普拉斯变换的基本性质

1. 线性性质

若 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$，$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$

则 $\mathcal{L}\left[\mathrm{A}_1 f_1(t) + \mathrm{A}_2 f_2(t)\right] = \mathrm{A}_1 \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + \mathrm{A}_2 \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$

$= \mathrm{A}_1 F_1(s) + \mathrm{A}_2 F_2(s)$ **$\mathbf{A_1, A_2}$为任意实常数**

证：$\mathcal{L}\left[\mathrm{A}_1 f_1(t) + \mathrm{A}_2 f_2(t)\right] = \int_{0_-}^{\infty} \left[\mathbf{A}_1 f_1(t) + \mathbf{A}_2 f_2(t)\right] e^{-st} dt$

$$= \mathbf{A}_1 \int_{0_-}^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \mathbf{A}_2 \int_{0_-}^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt$$

$$= \mathrm{A}_1 F_1(s) + \mathrm{A}_2 F_2(s)$$

根据拉氏变换的线性性质，求函数与常数相乘及几个函数相加减的象函数时，可以先求各函数的象函数再进行计算。

例1 求：$f(t)=U\varepsilon(t)$的象函数

解

$$F(s)=\mathscr{L}[U\varepsilon(t)]=U\mathscr{L}\left[\varepsilon(t)\right]=\frac{U}{s}$$

例2 求：$f(t)=\sin(\omega t)$的象函数

解

$$F(\mathrm{s})=\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right]=\mathscr{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

例3 求：$f(t)=K(1\text{-}e^{-\alpha t})$的象函数

解

$$F(s)=\mathscr{L}\left[K(1-e^{\alpha t})\right]$$

$$=\mathscr{L}[K]-\mathscr{L}\left[Ke^{-\alpha t}\right]$$

$$=\frac{K}{s}-\frac{K}{s+\alpha}$$

$$=\frac{K\alpha}{s(s+\alpha)}$$

2. 微分性质

若：$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$

则 $\mathscr{L}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0_-)$

设 $e^{st} = u$，$\dfrac{df(t)}{dt}dt = dv$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

分部积分公式

证：$\mathscr{L}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0_-}^{\infty} \dfrac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} df(t)$

$$= e^{-st} f(t)\Big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} f(t)(-s)dt$$

$$= sF(s) - f(0_-)$$

例　求：$f(t)=\cos(\omega t)$的象函数

解

$$\frac{d\sin(\omega t)}{dt}=\omega\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t)=\frac{1}{\omega}\frac{d\sin(\omega t)}{dt}$$

$$\mathscr{L}[\cos\omega t]=\mathscr{L}\left[\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\sin(\omega t)\right]$$

$$=\frac{s}{\omega}*\frac{\omega}{s^2+\omega^2}-0$$

$$=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

例　求：$f(t)=\delta(t)$的象函数

解

$$\delta(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \qquad \mathscr{L}[\varepsilon(t)]=\frac{1}{s}$$

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=\mathscr{L}[\frac{d}{dt}\varepsilon(t)]=s\times\frac{1}{s}=1$$

推广：

$$\mathscr{L}[\frac{d^2f(t)}{dt^2}]=s[sF(s)-f(0_-)]-f'(0_-)$$

$$=s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$$

$$\mathscr{L}[\frac{d^nf(t)}{dt^n}]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0_-)-\cdots-f^{n-1}(0_-)$$

3. 积分性质

设：$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$

则：$\mathscr{L}\left[\int_{0_-}^{t} f(t)dt\right] = \dfrac{F(s)}{s}$

例 求：$f(t) = t$ 的象函数

解 由于 $f(t) = t = \int_{0_-}^{t} \varepsilon(\xi)d\xi$

$$\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}\left[\int_{0^-}^{t} \varepsilon(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

4. 延迟性质

设： $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$

则： $\mathscr{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$

证 当 $t < t_0$ 时, $f(t-t_0) = 0$, 令 $\tau = t - t_0$

则： $\mathscr{L}[f(t-t_0)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt$

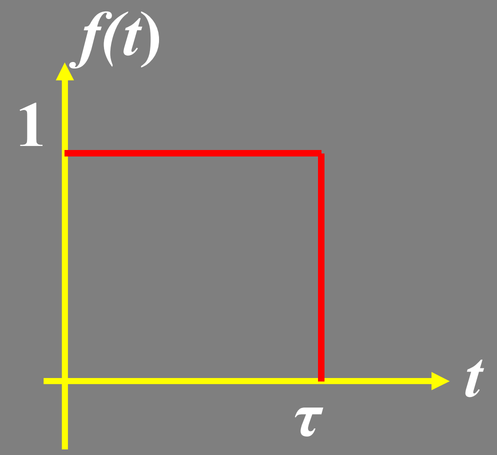
$$= \int_{0_-}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau$$

$$= e^{-st_0}\int_{0_-}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$= e^{-st_0}F(s)$$

例　求矩形脉冲的象函数

解　$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)$$



根据延迟性质

$$\mathscr{L}[\varepsilon(t)]=\frac{1}{s}$$

$$\mathscr{L}[\varepsilon(t-\tau)]=\frac{1}{s}e^{-s\tau}$$

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s\tau}$$

5. 拉氏变换的卷积定理

卷积积分定义 $$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\mathrm{t}-\xi) f_2(\xi) d\xi$$

拉氏变换的卷积定理

若 $\mathscr{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ $\mathscr{L}[f_2(t)] = F_2(s)$

则 $$\mathscr{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = \left[\int_0^t f_1(t-\xi) f_2(\xi)\right]$$

$$= F_1(\mathrm{s}) F_2(\mathrm{s})$$

14.3 拉普拉斯反变换的部分分式展开

用拉氏变换求解线性电路的时域响应时，需要把求得的响应的拉氏变换式反变换为时间函数。

由象函数求原函数的方法：

(1) 利用公式 $$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

(2) 对简单形式的$F(s)$可以查拉氏变换表得原函数

(3) 把$F(s)$分解为简单项的组合

部分分式展开法

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s)$$

$$\longrightarrow f(t)=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t)$$

象函数的一般形式：

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_n}$$

式中 m 和 n 为正数，且$n\geq m$

把$F(s)$分解成若干个可以在拉氏变换表中找到的简单项之和的方法称为部分分式展开法（分解定理）。

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_n}$$

式中 m 和 n 为正数，且 $n\geq m$

当 $n=m$，$F(s)=A+\dfrac{N_0(s)}{D(s)}$

真分式

常数，其原函数为 $A\delta(t)$

当 $n>m$，$F(s)$ 为真分式

用部分分式展开真分式时，需对分母多项式作因式分解，即求$D(s)=0$时的根。其根可是单根、共轭复根和重根。

① 若$D(s)=0$有n个单根分别为$p_1 \cdots p_n$

利用部分分式可将$F(s)$分解为：

$$F(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

K_1、K_2、..K_n 待定系数

原函数的一般形式：

$$f(t)=K_1e^{p_1t}+K_2e^{p_2t}+\cdots+K_ne^{p_nt}$$

待定系数的确定：

方法1

$$(s-p_1)F(s)=\frac{\cancel{(s-p_1)}K_1}{\cancel{s-p_1}}+\frac{(s-p_1)K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{(s-p_1)K_n}{s-p_n}$$

$$\longrightarrow K_1=\left[(s-p_1)F(s)\right]_{s=p_1}$$

$$K_i=F(s)(s-p_i)\Big|_{s=p_i}\qquad i=1、2、3\cdots、n$$

待定系数的确定：

方法2　　求极限的方法

$$K_i = \lim_{s \to p_i} \frac{N(s)(s-p_i)}{D(s)}$$

$$= \lim_{s \to p_i} \frac{N'(s)(s-p_i)+N(s)}{D'(s)} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

$$K_i = \left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=p_i} \qquad i = 1,2,3\cdots、 \ n$$

例 求$F(s)=\dfrac{4s+5}{s^2+5s+6}$的原函数

解法1 $$F(s)=\frac{4s+5}{s^2+5s+6}$$ p_1=-2, p_2=-3

$$=\frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+3}$$

$$K_1=(s-p_1)F(s)|_{s=p_1}=\frac{4s+5}{s+3}\Big|_{s=-2}=-3$$

$$K_2=\frac{4s+5}{s+2}\Big|_{s=-3}=7$$ $$f(t)=-3e^{-2t}+7e^{-3t}$$

例 求$F(s)=\dfrac{4s+5}{s^2+5s+6}$的原函数

解法2

$$K_1=\frac{N(s)}{D'(s)}=\frac{4s+5}{2s+5}\bigg|_{s=-2}=-3$$

$$K_2=\frac{N(s)}{D'(s)}=\frac{4s+5}{2s+5}\bigg|_{s=-3}=7$$

$$F(s)=\frac{4s+5}{s^2+5s+6}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+3}=\frac{-3}{s+2}+\frac{7}{s+3}$$

$$f(t)=-3e^{-2t}+7e^{-3t}$$

例

求$F(s)=\dfrac{2s+1}{s^3+7s^2+10s}$的原函数

解：

$$F(s)=\frac{2s+1}{s^3+7s^2+10s}=\frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}$$

$p_1=0,$

$p_2=-2,$

$p_3=-5$

$$=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{(s+2)}+\frac{K_3}{(s+5)}$$

$$K_1=\left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=p_1}=\left.\frac{2s+1}{3s^2+14s+10}\right|_{s=0}=0.1$$

$$K_2=0.5,\qquad K_3=-0.6$$

$$f(t)=0.1+0.5e^{-2t}-0.6e^{-5t}$$

② 若$D(s)=0$有共轭复根

一对共轭复根为：
$$\begin{cases} p_1=\alpha+j\omega \\ p_2=\alpha-j\omega \end{cases}$$

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-\alpha-j\omega)(s-\alpha+j\omega)}$$

$$=\frac{K_1}{s-\alpha-j\omega}+\frac{K_2}{s-\alpha+j\omega}$$

$$K_1 = \left[(s-\alpha-j\omega)F(s)\right]_{s=\alpha+j\omega} = \left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=\alpha+j\omega}$$

$$K_2 = \left[(s-\alpha+j\omega)F(s)\right]_{s=\alpha-j\omega} = \left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=\alpha-j\omega}$$

K_1，K_2也是一对共轭复数

设 $K_1=|K_1|e^{j\theta_1}$， $K_2=|K_1|e^{-j\theta_1}$

$$f(t)=(K_1e^{(\alpha+j\omega)t}+K_2e^{(\alpha-j\omega)t})$$

$$=(|K_1|e^{j\theta_1}e^{(\alpha+j\omega)t}+|K_1|e^{-j\theta_1}e^{(\alpha-j\omega)t})$$

$$=|K_1|e^{\alpha t}[e^{j(\omega t+\theta_1)}+e^{-j(\omega t+\theta_1)}]$$

$$=2|K_1|e^{\alpha t}\cos(\omega t+\theta_1)$$

例 求$F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+2s+5}$的原函数 $f(t)$

解 $s^2+2s+5=0$的根： $p_{1,2}=-1\pm j2=\alpha\pm j\omega$

$$K_1=\frac{N(s)}{D'(s)}\bigg|_{s=p_1}=\frac{s+3}{2s+2}\bigg|_{s=-1+j2}=0.5-j0.5=0.5\sqrt{2}\angle e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$K_2=0.5\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \qquad f(t)=2|K_1|e^{\alpha t}\cos(\omega t+\theta_1)$$

$$f(t)=2|K_1|e^{-t}\cos(2t-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t-\frac{\pi}{4})$$

③ 若$D(s)=0$具有重根，设其具有三重根

$$F(s)=\frac{K_{13}}{s-p_1}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^2}+\frac{K_{11}}{(s-p_1)^3}\cdots+\left(\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots\right)$$

将上式两边同时乘以 $(s-p_1)^3$

$$(s-p_1)^3F(s)=(s-p_1)^2K_{13}+(s-p_1)K_{12}+K_{11}+\cdots$$

$$K_{11}=(s-p_1)^3F(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$(s-p_1)^3F(s)=(s-p_1)^2K_{13}+(s-p_1)K_{12}+K_{11}+\cdots$$

再对上式两边对 **s** 求导一次，得到：

$$K_{12}=\frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^3F(s)\right]_{s=p_1}$$

同样方法得到：

$$K_{13}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}[(s-p_1)^3F(s)]_{s=p_1}$$

$$F(\mathrm{s})=\frac{K_{1q}}{s-p_1}+\frac{K_{1(q-1)}}{(s-p_1)^2}+\cdots+\frac{K_{11}}{(s-p_1)^q}+\left(\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots\right)$$

$$K_{11}=[(s-p_1)^q F(\mathrm{s})]_{s=p_1}$$

***D*(*s*)=0具有*q* 阶重根**

$$K_{12}=\frac{d}{ds}[(s-p_1)^q F(\mathrm{s})]_{\mathrm{s=p_1}}$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}[(s-p_1)^q F(\mathrm{s})]_{s=p_1}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{K_{1q}=\frac{1}{(q-1)!}\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}\left[(s-p_1)^q F(\mathrm{s})\right]_{s=p_1}}$$

例　求：$F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3 s^2}$ 的原函数 $f(t)$

解

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)^3 s^2}=\frac{K_{13}}{s+1}+\frac{K_{12}}{(s+1)^2}+\frac{K_{11}}{(s+1)^3}+\frac{K_{22}}{s}+\frac{K_{21}}{s^2}$$

$p_1=-1,\ p_2=0$

$$K_{11}=[(s+1)^3F(\mathrm{s})]=\left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=-1}=1$$

$$K_{12}=\left.\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2}\right|_{s=-1}=\left.\frac{-2}{s^3}\right|_{s=-1}=2$$

$$K_{13}=\left.\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{s^2}\right|_{s=-1}=\left.\frac{1}{2}\frac{6}{s^4}\right|_{s=-1}=3$$

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)^3 s^2}=\frac{K_{13}}{s+1}+\frac{K_{12}}{(s+1)^2}+\frac{K_{11}}{(s+1)^3}+\frac{K_{22}}{s}+\frac{K_{21}}{s^2}$$

$$K_{11}=1,\quad K_{12}=2,\quad K_{13}=3$$

$$K_{21}=[s^2F(\mathrm{s})]_{s=0}=\left.\frac{1}{(s+1)^3}\right|_{s=0}=1$$

$$K_{22}=\frac{d}{ds}[s^2F(\mathrm{s})]_{s=0}=-3$$

$$f(t)=3e^{-t}+2te^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}-3+t$$

小结

由*F*(s)求*f*(t) 的步骤：

1. ***n* =*m*** 时将***F*(s)**化成真分式和多项式之和

$$F(s)=A+\frac{N_0(s)}{D(s)}$$

2. 求真分式分母的根，确定分解单元

$$F(s)=A+\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

3. 将真分式展开成部分分式，求各部分分式的系数

4. 对每个部分分式和多项式逐项求拉氏反变换 。

例

求：$F(s)=\dfrac{s^2+9s+11}{s^2+5s+6}$的原函数

解

$$F(s)=\frac{s^2+9s+11}{s^2+5s+6}=1+\frac{4s+5}{s^2+5s+6}$$

$$=1+\frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}=1+\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+3}$$

$$K_1=\left.\frac{4s+5}{s+3}\right|_{s=-2}=-3$$

$$F(s) = 1 + \frac{4s+5}{(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{\mathrm{s}+2} + \frac{K_2}{\mathrm{s}+3}$$

$$K_1 = -3 \qquad K_2 = \left.\frac{4s+5}{s+2}\right|_{s=-3} = 7$$

$$F(s) = 1 + \frac{-3}{\mathrm{s}+2} + \frac{7}{\mathrm{s}+3}$$

$$\boldsymbol{f(t) = \delta(t) + (7e^{-3t} - 3e^{-2t})}$$

14.4 运算电路

1. 电路定律的运算形式

基尔霍夫定律的时域表示： $\sum i(t)=0$ $\sum u(t)=0$

相量法： $i \rightarrow \dot{I}$ $u \rightarrow \dot{U}$

基尔霍夫定律的相量表示： $\sum \dot{I}=0$ $\sum \dot{U}=0$

元件 $\rightarrow$ 复阻抗、复导纳 $\dot{U}=Z\dot{I}$

$\longrightarrow$ 相量形式电路模型

运算法与相量法的基本思想类似：

① 把时间函数变换为对应的象函数

$$u(t) \rightarrow U(s) \qquad i(t) \rightarrow I(s)$$

电路定律的运算形式： $\sum I(s) = 0$ $\sum U(s) = 0$

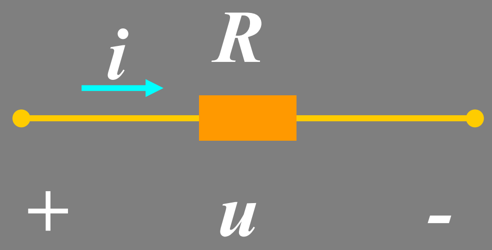
② 把微积分方程变换为以象函数为变量的线性代数方程

元件 $\rightarrow$ 运算阻抗、运算导纳 $U(s) = Z(s)I(s)$

$\longrightarrow$ 运算形式电路模型

2. 电路元件的运算形式

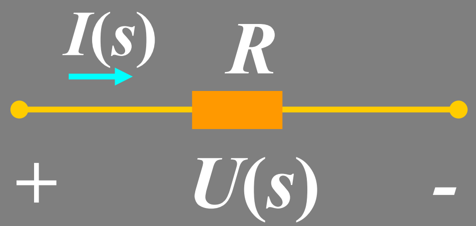
① 电阻R的运算形式



$$U = R\,i$$
$$I = G\,u$$

两边取拉氏变换

$$U(s) = RI(s)$$
$$I(s) = GU(s)$$

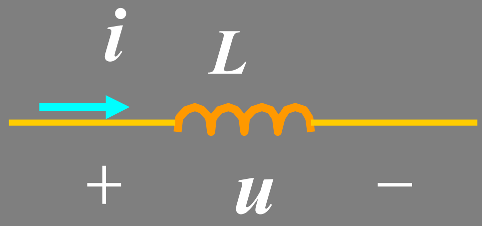


$$Z(s) = R$$ 运算阻抗

$$Y(s) = G$$ 运算导纳

电阻的运算电路

② 电感L的运算形式



$$u = L\frac{di}{dt}$$

取拉氏变换

$$U(s) = L(sI(s) - i(0_-))$$

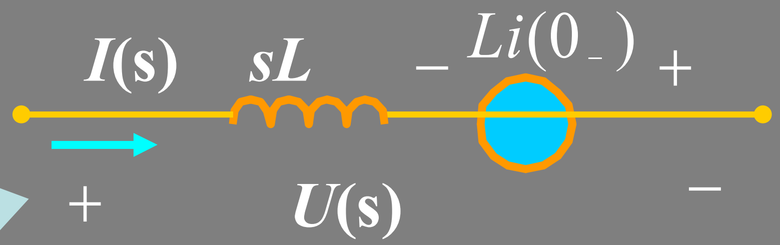
$$= sLI(s) - Li(0_-)$$

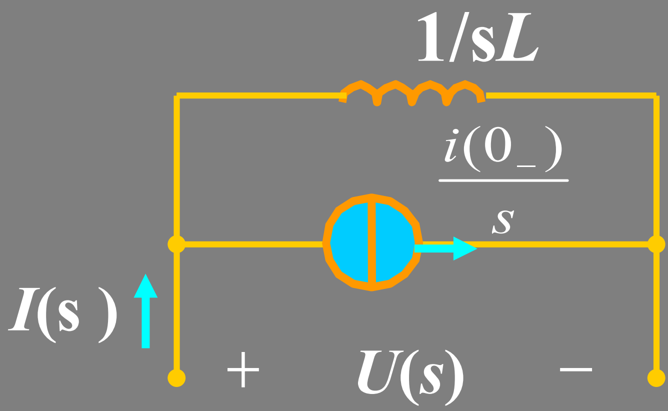
$$I(s) = \frac{U(s)}{sL} + \frac{i(0_-)}{s}$$

$$Z(s) = sL$$

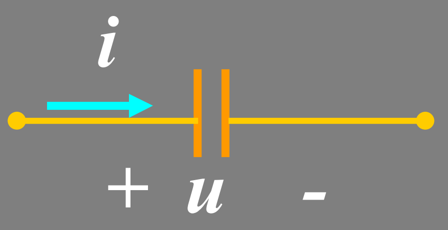
$$Y(s) = 1/sL$$

L的运算电路





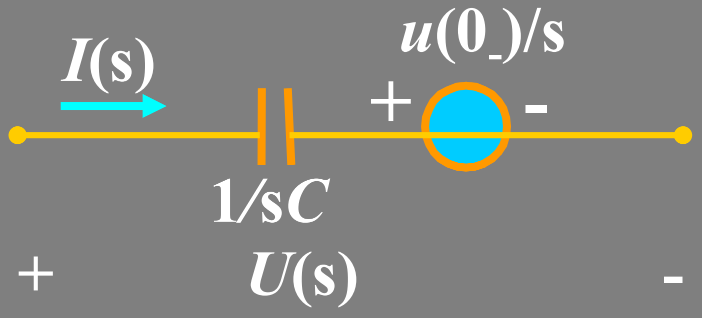
③ 电容C的运算形式



$$u = u(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i\,dt$$

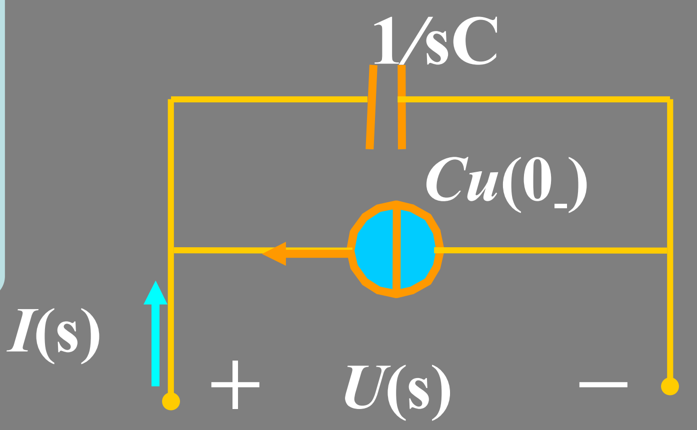
取拉氏变换

C 的运算电路



$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0_-)}{s}$$

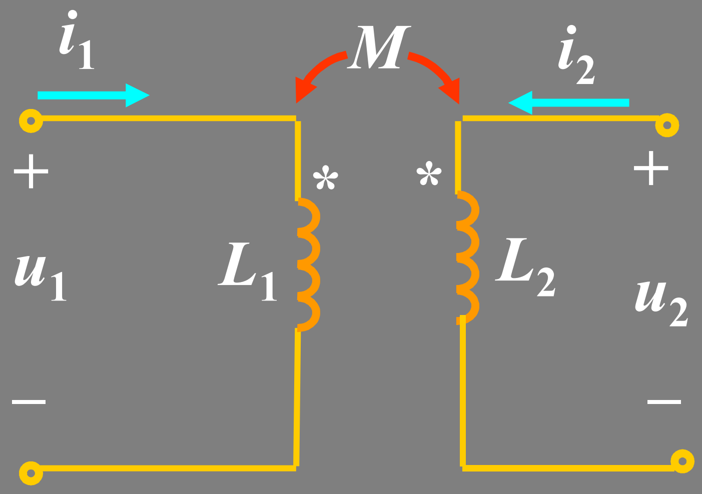
$$I(s) = sCU(s) - Cu(0_-)$$



$$Z(s) = 1/sC$$

$$Y(s) = sC$$

④ 耦合电感的运算形式

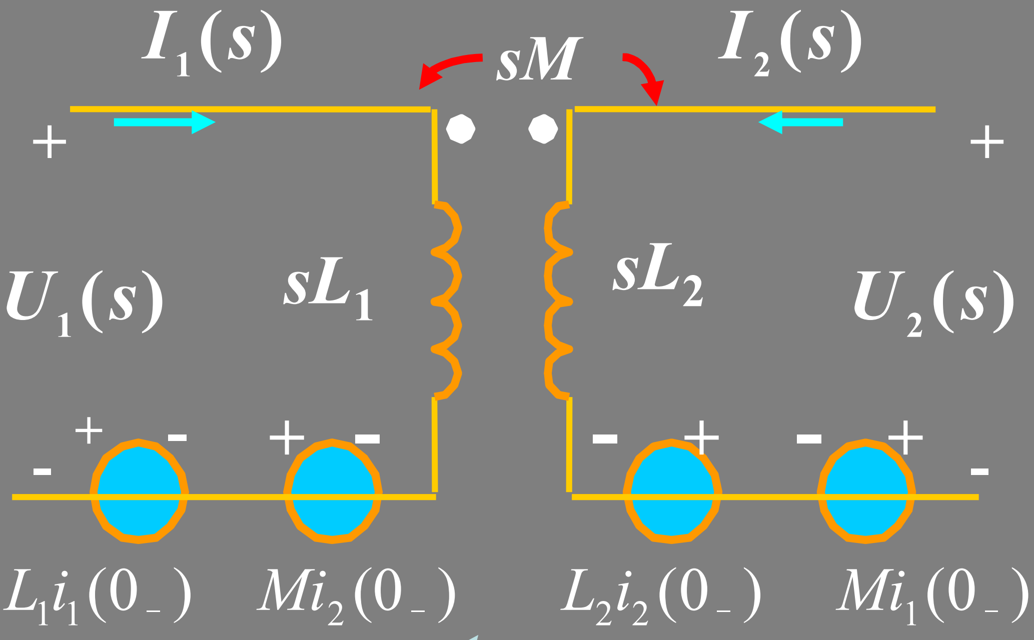


$$\begin{cases} u_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

取拉氏变换

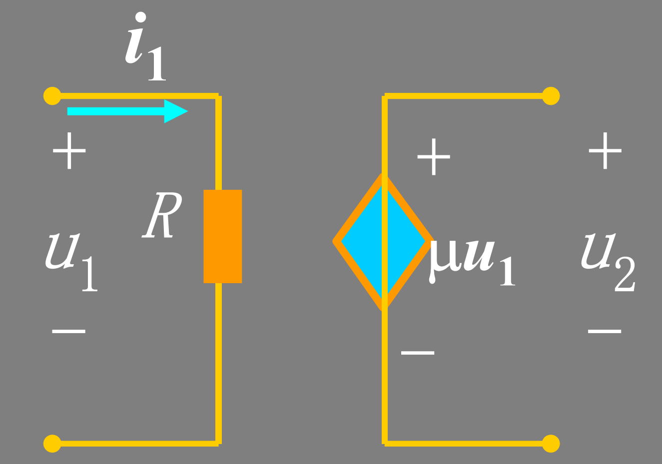
$$\begin{cases} U_1(\mathrm{s}) = \mathrm{s}L_1 I_1(\mathrm{s}) - L_1 i_1(0_-) + \mathrm{s}MI_2(\mathrm{s}) - Mi_2(0_-) \\ U_2(\mathrm{s}) = \mathrm{s}L_2 I_2(\mathrm{s}) - L_2 i_2(0_-) + \mathrm{s}MI_1(\mathrm{s}) - Mi_1(0_-) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1(s) = sL_1I_1(s) - L_1i_1(0_-) + sMI_2(s) - Mi_2(0_-) \\ U_2(s) = sL_2I_2(s) - L_2i_2(0_-) + sMI_1(s) - Mi_1(0_-) \end{cases}$$



耦合电感的运算电路

⑤ 受控源的运算形式



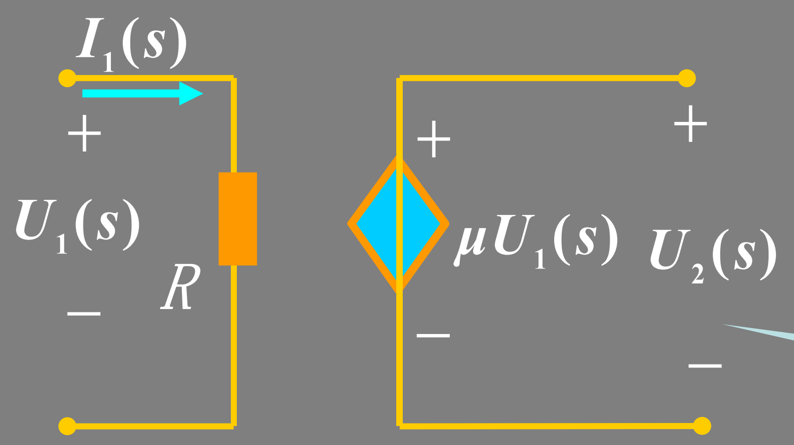
$$u_1 = i_1 R$$

$$u_2 = \mu u_1$$

取拉氏变换

$$U_1(s) = I_1(s) R$$

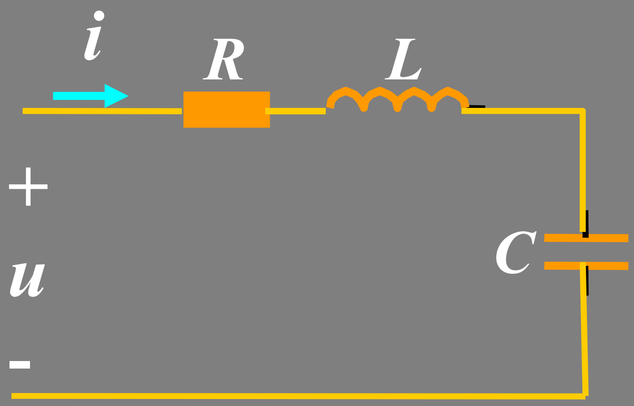
$$U_2(s) = \mu U_1(s)$$

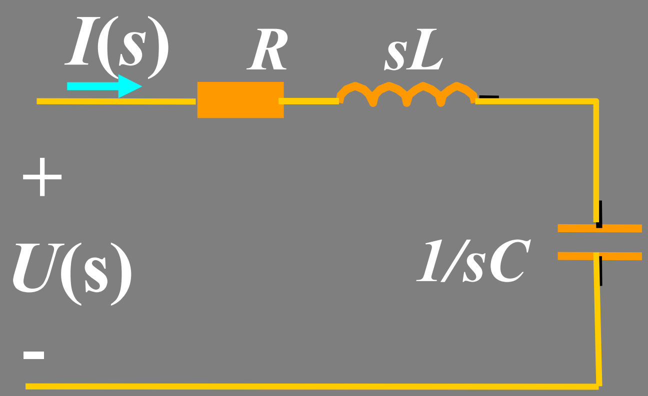


受控源的运算电路

3. 运算电路模型

RLC串联电路的运算形式





时域电路 拉氏变换 → 运算电路

$$u_c(0_-)=0 \quad i_L(0_-)=0$$

$$u = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i_c dt$$

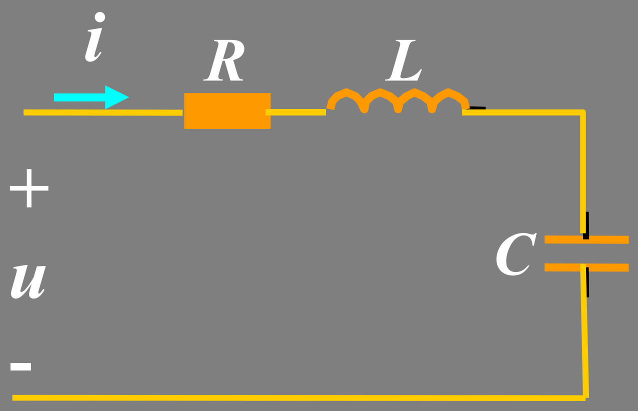
$$U(s)=I(s)R+sLI(s)+\frac{1}{sC}I(s)$$

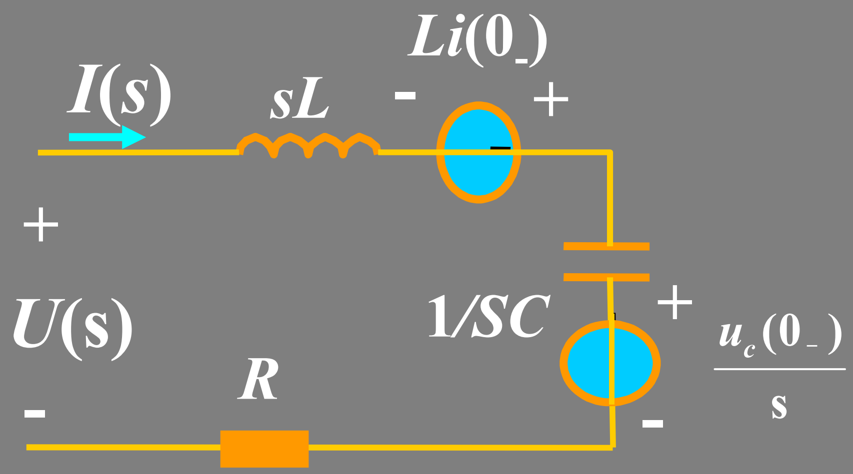
$$=I(s)(R+sL+\frac{1}{sC})=I(s)Z(s)$$

$$Z(s)=\frac{1}{Y(s)}=R+sL+\frac{1}{sC}$$

$$\begin{cases} U(s)=Z(s)I(s) \\ I(s)=Y(s)U(s) \end{cases}$$

运算形式
欧姆定律



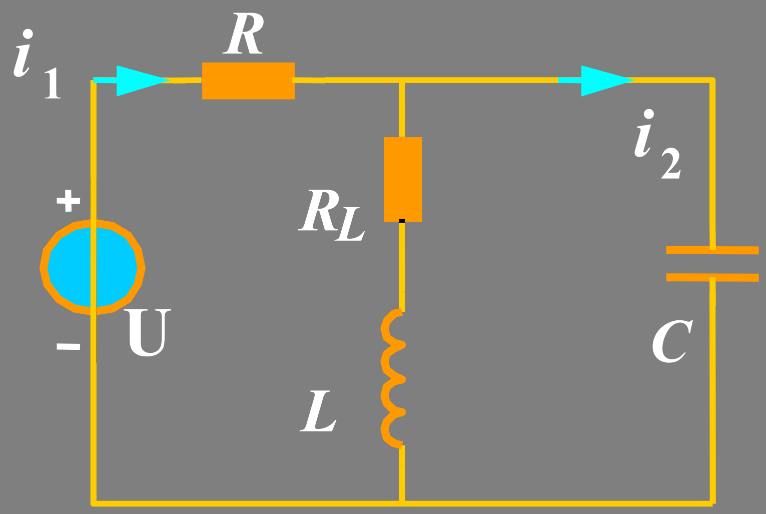


$$u_c(0_-)\neq 0 \quad i_L(0_-)\neq 0$$

$$U(s)=I(s)R+sLI(s)-Li(0_-)+\frac{1}{sc}I(s)+\frac{u_C(0_-)}{s}$$

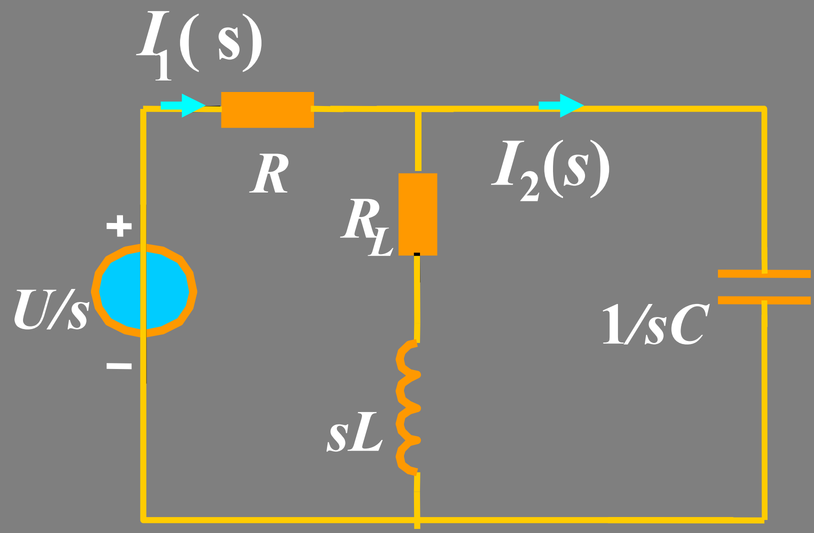
1. 电压、电流用象函数形式
2. 元件用运算阻抗或运算导纳
3. 电容电压和电感电流初始值用附加电源表示

例　给出图示电路的运算电路模型



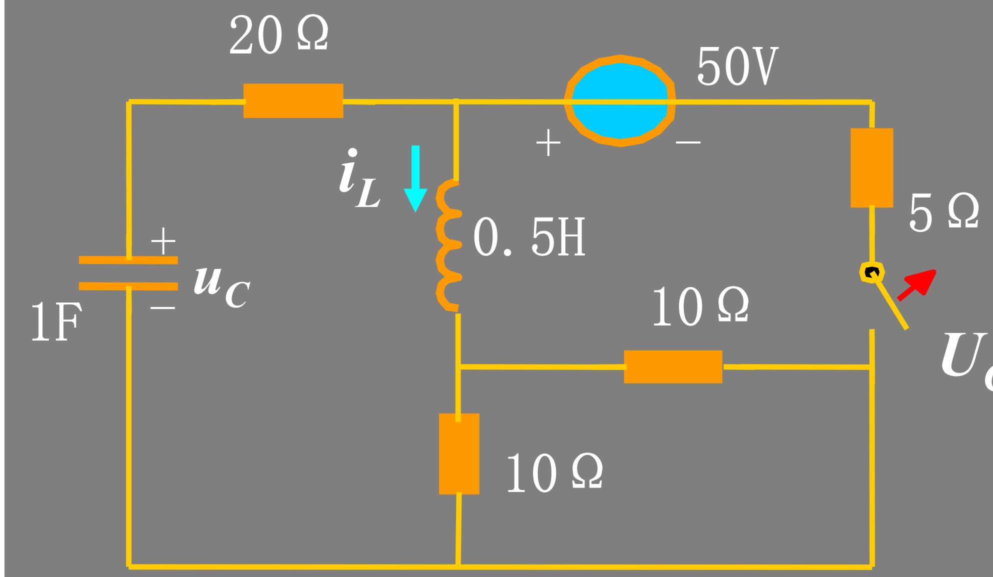
$u_c(0_-)=0 \quad i_L(0_-)=0$

时域电路



运算电路

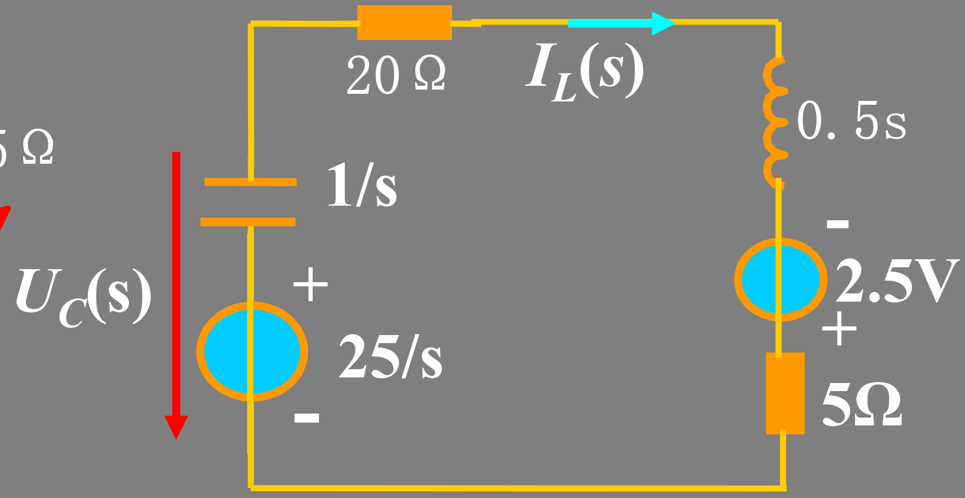
例　给出图示电路的运算电路模型



t=0时打开开关

时域电路

$u_c(0_-)$=25V　　$i_L(0_-)$=5A



t >0 运算电路

注意附加电源

14.5 应用拉普拉斯变换法分析线性电路

计算步骤：

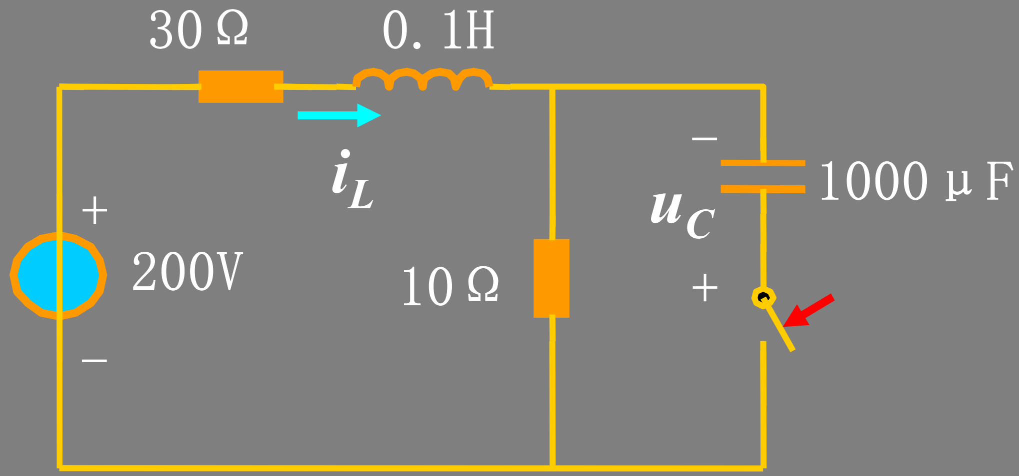
1. 由换路前的电路计算$u_c(0_-)$, $i_L(0_-)$ 。

2. 画运算电路模型，注意运算阻抗的表示和附加电源的作用。

3. 应用电路分析方法求象函数。

4. 反变换求原函数。

例 电路原处于稳态，$t=0$时开关闭合，用运算法求i_L, u_L，已知：$u_C(0_-)=100\text{V}$



解 （1）计算初值

$$i_L(0_-)=5\text{A}$$

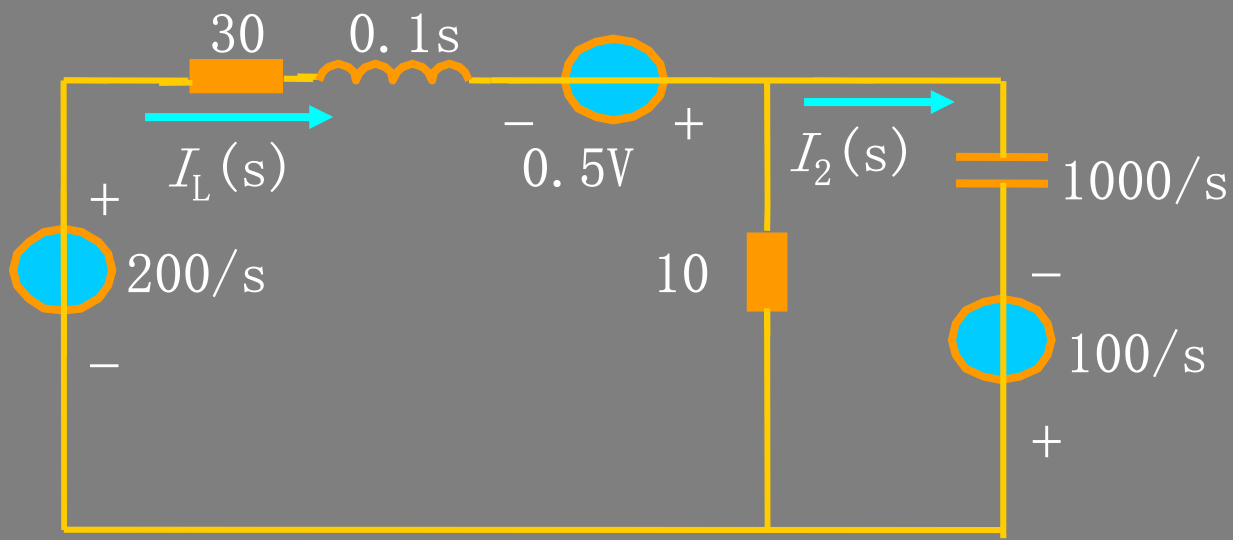
（2）画运算电路

$$sL=0.1s$$

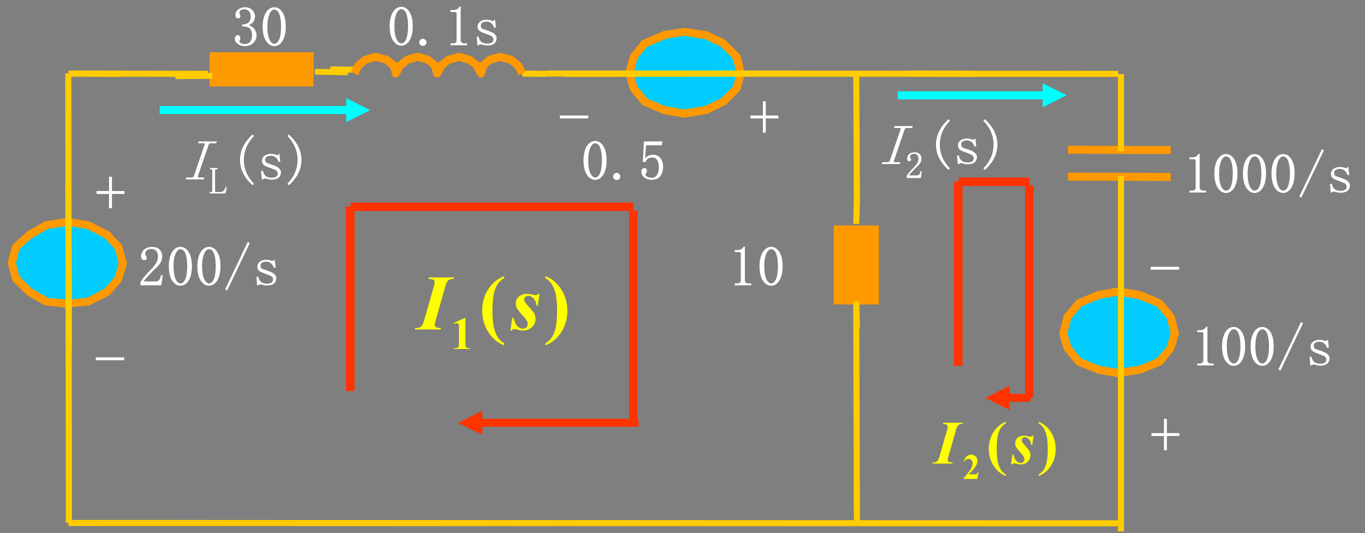
$$\frac{1}{sC}=\frac{1000}{s}$$

$$Li_L(0_-)=0.5\text{V}$$

$$\frac{u_C(0_-)}{s}=\frac{100}{s}$$



(3)回路法



$$\begin{cases}(40+0.1s)I_1(s)-10I_2(s)=\dfrac{200}{s}+0.5\\ -10I_1(s)+(10+\dfrac{1000}{s})I_2(s)=\dfrac{100}{s}\end{cases}$$

$$I_1(s)=\frac{5(s^2+700s+40000)}{s(s+200)^2}=I_L(s)$$

(4) 反变换求原函数

$$I_1(s)=\frac{5(s^2+700s+40000)}{s(s+200)^2}$$

$D(s)=0$有2个根： $p_1=0$， $p_2=-200$为二重根

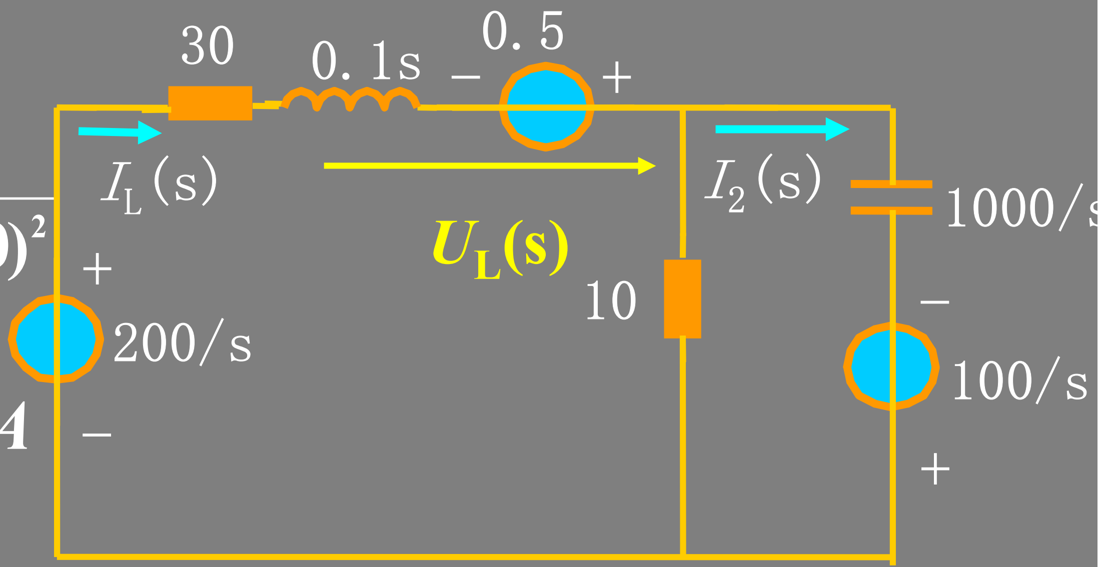
$$I_1(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_{22}}{s+200}+\frac{K_{21}}{(s+200)^2}$$

$$K_1=F(s)s\Big|_{s=0}=\frac{5(s^2+700s+40000)}{s^2+400s+200^2}\Big|_{s=0}=5$$

$$K_{21}=F(s)(s+200)^2\Big|_{s=-200}=1500$$

$$K_{22}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s+200)^2F(s)\Big|_{s=-200}=0$$

$$I_1(s)=\frac{5}{s}+\frac{0}{(s+200)}+\frac{1500}{(s+200)^2}$$



$$i_1(t)=i_L(t)=(5+1500te^{-200t})A$$

求u_L

注意 $U_L(s)\neq I_L(s)sL$

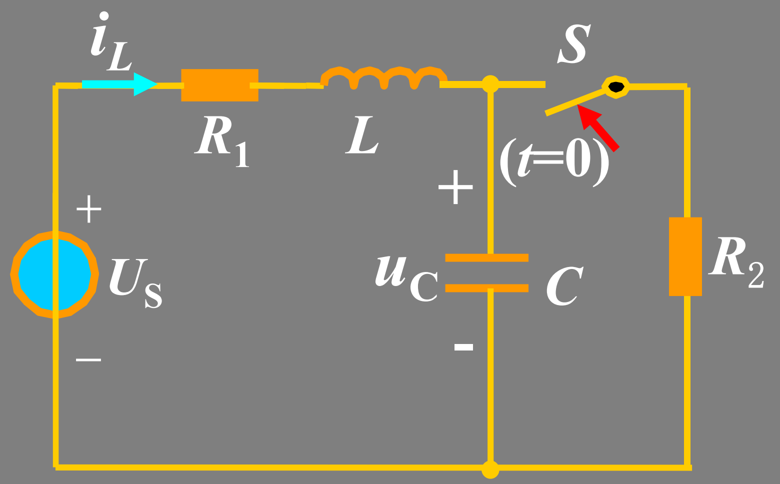
$$U_L(s)=I_L(s)sL-0.5=\frac{150}{s+200}+\frac{-30000}{(s+200)^2}$$

$$u_L(t)=150e^{-200t}-30000te^{-200t}\text{V}$$

例14-9 电路原处于稳态，$t=0$时开关闭合，用运算法求$i_L(t)$

$U_S=1\text{V}, R_1=R_2=1\Omega, L=1\text{H}, C=1\text{F}$

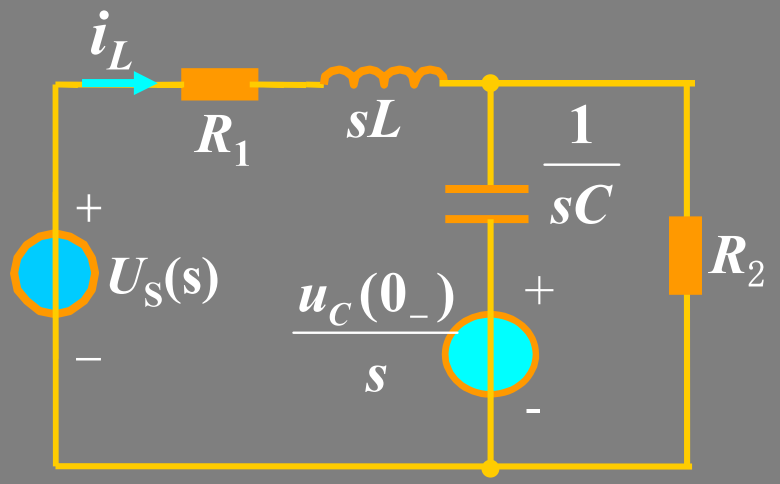
解 （1）计算初值



$$i_L(0_-)=0$$

$$u_C(0_-)=1\text{V}$$

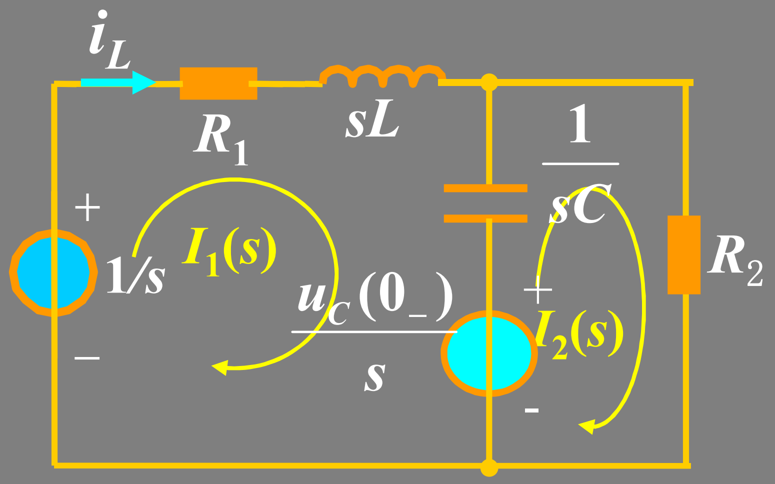
（2）画运算电路



$$Li_L(0\_)=0 \qquad U_s(s)=\frac{1}{s}$$

$$\frac{u_C(0\_)}{s}=\frac{1}{s}$$

用回路法



$$\left(R_1 + sL + \frac{1}{sC}\right)I_1(s) - \frac{1}{sC}I_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{u_C(0_-)}{s}$$

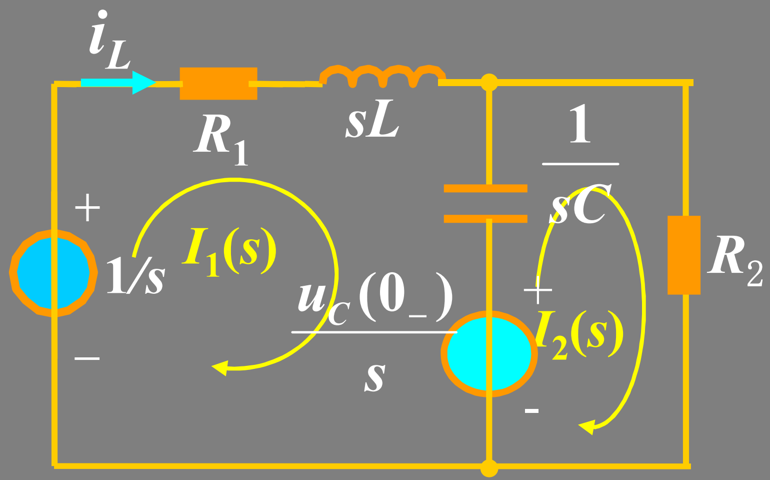
$$-\frac{1}{sC}I_1(s) + \left(R_2 + \frac{1}{sC}\right)I_2(s) = \frac{u_C(0_-)}{s}$$

代入已知数据

$$\left(1 + s + \frac{1}{s}\right)I_1(s) - \frac{1}{s}I_2(s) = 0$$

$$-\frac{1}{s}I_1(s) + \left(1 + \frac{1}{s}\right)I_2(s) = \frac{1}{s}$$

用回路法



$$(1+s+\frac{1}{s})I_1(s)-\frac{1}{s}I_2(s)=0$$

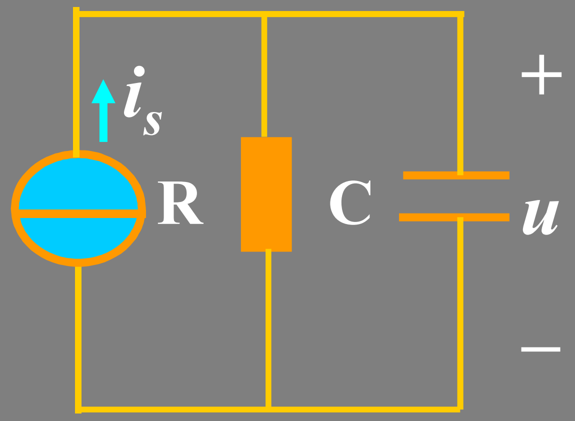
$$-\frac{1}{s}I_1(s)+(1+\frac{1}{s})I_2(s)=\frac{1}{s}$$

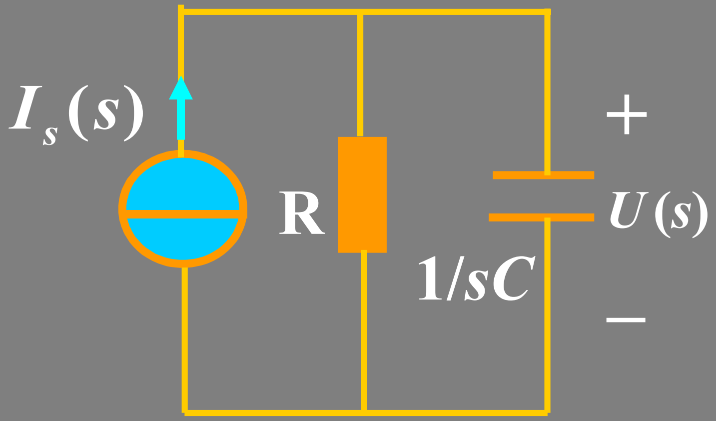
$$I_L(s)=I_1(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)}$$

其反变换

$$i_L(t)=\frac{1}{2}(1+e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t)\mathrm{A}\quad(t\geq 0)$$

例14-10 求图示电路$i_s=\delta(t)$及$i_s=\varepsilon(t)$的$u(t)(t\geq 0)$。



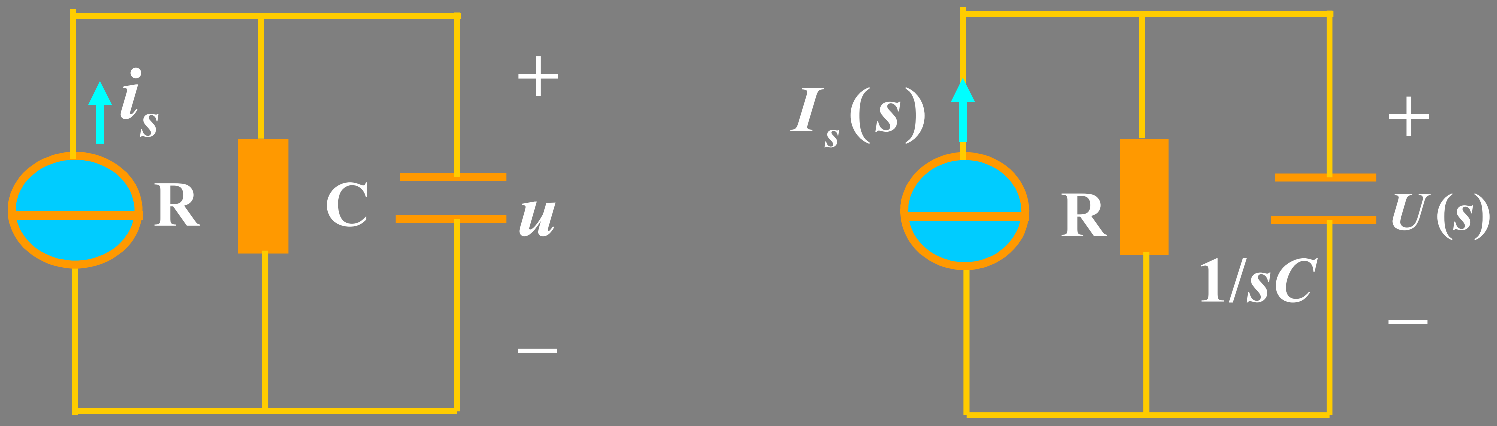


解

(1) $i_S=\varepsilon(t)$A时，$I_S(s)=\dfrac{1}{s}$

$$U(s)=Z(s)I_S(s)=\frac{R\times\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}\times\frac{1}{s}=\frac{R}{s}-\frac{R}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$u(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)\text{V}$$

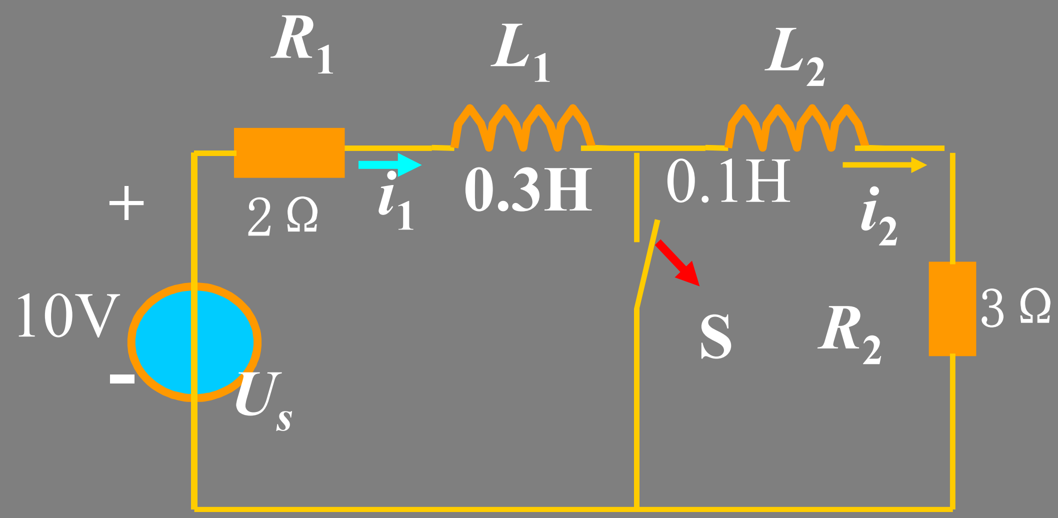


(2) $i_S=\delta(t)$A时，$I_S(s)=1$

$$U(s)=Z(s)I_S(s)=\frac{R\times\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}$$

$$u=\frac{1}{C}e^{-t/RC}\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

例 $t=0$时打开开关S ，求电流 i_1, i_2。



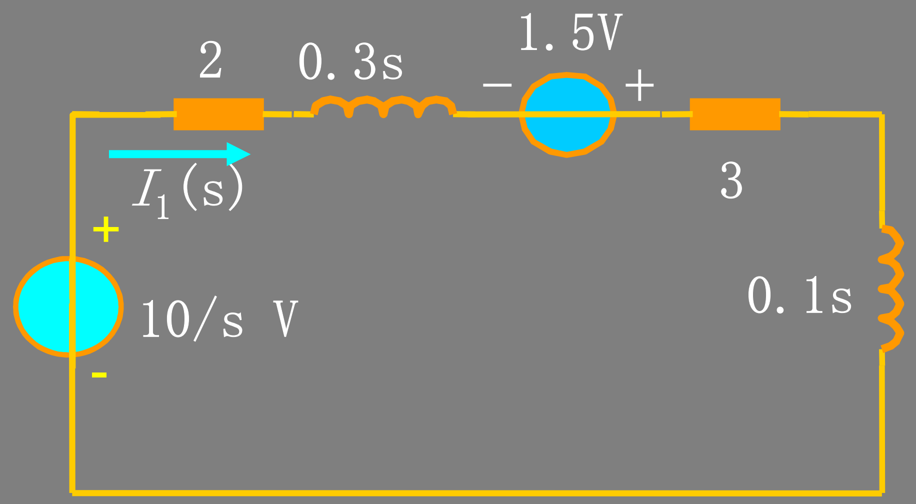
$$i_1(0_-)=5A$$

$$i_2(0_-)=0$$

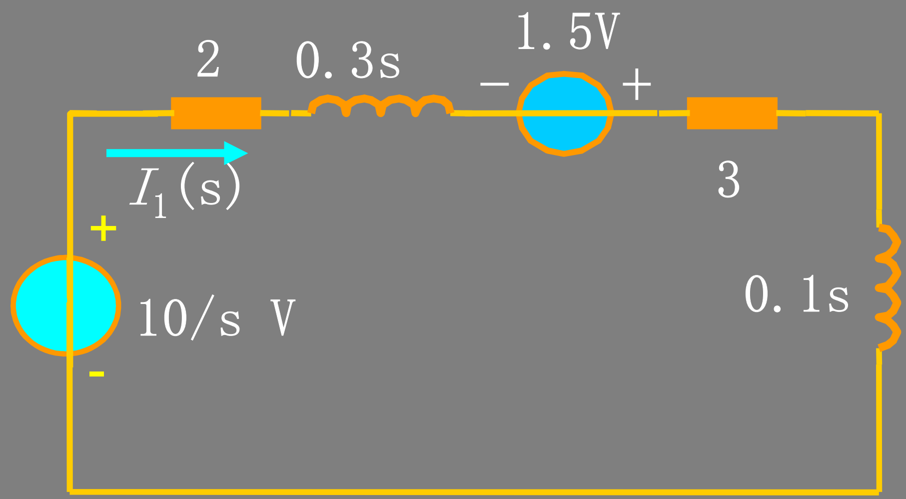
解

$$L_1 i_1(0_-)=1.5\text{V}$$

$$L_2 i_2(0_-)=0$$



$$I_1(s)=\frac{\frac{10}{s}+1.5}{5+0.4s}$$



$$=\frac{10+1.5s}{(5+0.4s)s}$$

$$=\frac{25+3.75s}{(s+12.5)s}\quad=\frac{2}{s}+\frac{1.75}{s+12.5}$$

$$i_1=2+1.75e^{-12.5t}=i_2$$

注意 $\quad i_1(0_+)\neq i_1(0_-) \qquad i_2(0_+)\neq i_2(0_-)$

小结：

1、运算法直接求全响应

2、用$\mathbf{0_-}$初始条件，跃变情况自动包含在响应中

3、运算法分析动态电路的步骤：

1）. 由换路前电路计算$u_c(0_-)$, $i_L(0_-)$;

2）. 画运算电路图;

3）. 应用电路分析方法求象函数;

4）. 反变换求原函数。

14.6　网络函数的定义

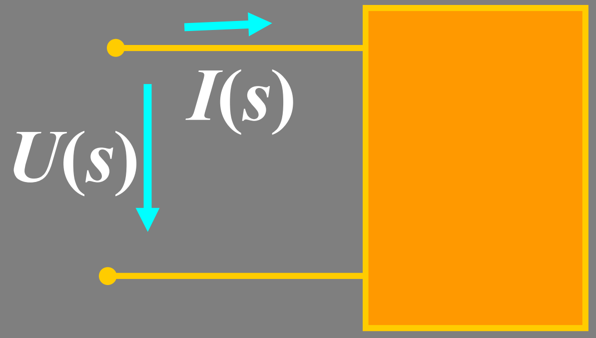
1. 网络函数***H***（***s***）的定义

在线性网络中，电路在单一的独立激励源作用下，其零状态响应***r*** **(*t*)**的象函数***R*** **(s)**与激励***e*** **(*t*)**的象函数***E*** **(s)**之比定义为该电路的网络函数。

$$H(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathscr{L}\left[\text{零状态响应}\right]}{\mathscr{L}\left[\text{激励函数}\right]} = \frac{\mathscr{L}\left[\mathrm{r(t)}\right]}{\mathscr{L}\left[\mathrm{e(t)}\right]} = \frac{R(s)}{E(s)}$$

2. 网络函数*H*(s)的类型

①驱动点函数



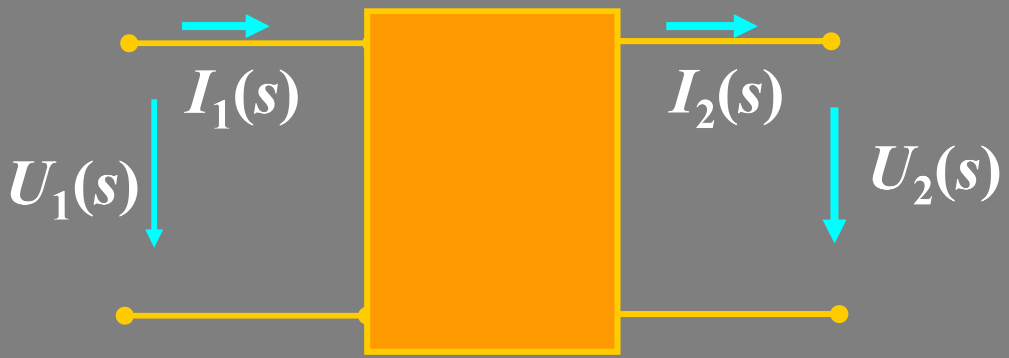
激励是电流源，响应是电压

$$H(S)=\frac{U(S)}{I(S)}$$ 驱动点阻抗

激励是电压源，响应是电流

$$H(S)=\frac{I(S)}{U(S)}$$ 驱动点导纳

②转移函数(传递函数)



激励是电压源

$$H(s)=\frac{I_2(s)}{U_1(s)}$$ 转移导纳

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$ 转移电压比

激励是电流源

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{I_1(s)}$$ 转移阻抗

$$H(s)=\frac{I_2(s)}{I_1(s)}$$ 转移电流比

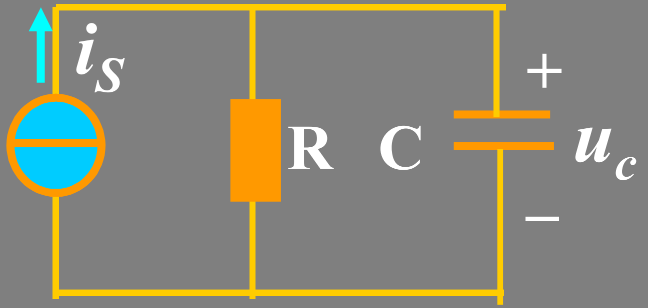
注意

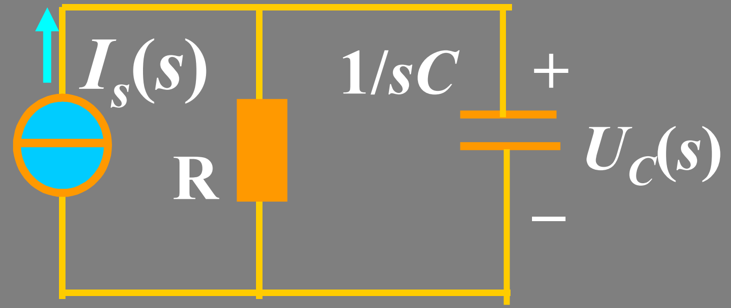
（1）根据网络函数的定义，若 $E(s)=1$，即$e(t)=\delta(t)$，则 $R(s)=H(s)$，即网络函数就是该响应的象函数。所以，网络函数的原函数 $h(t)$ 为电路的单位冲激响应，因此如果已知电路某一处的单位冲激响应 $h(t)$，就可通过拉氏变换得到该响应的网络函数。

（2）网络函数仅与网络的结构和电路参数有关，与激励的函数形式无关，因此如果已知某一响应的网络函数 $H(s)$，它在某一激励 $E(s)$ 下的响应 $R(s)$ 就可表示为：

$$R(s)=H(s)\,E(s)$$

例 电路激励$i(t)=\delta(t)$，求冲激响应$h(t)$，即电容电压$u_C(t)$。





$$H(s)=\frac{U_C(s)}{I_S(s)}=\frac{I_S(s)}{Y(s)}\times\frac{1}{I_S(s)}=\frac{1}{sC+\frac{1}{R}}=\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

驱动点阻抗

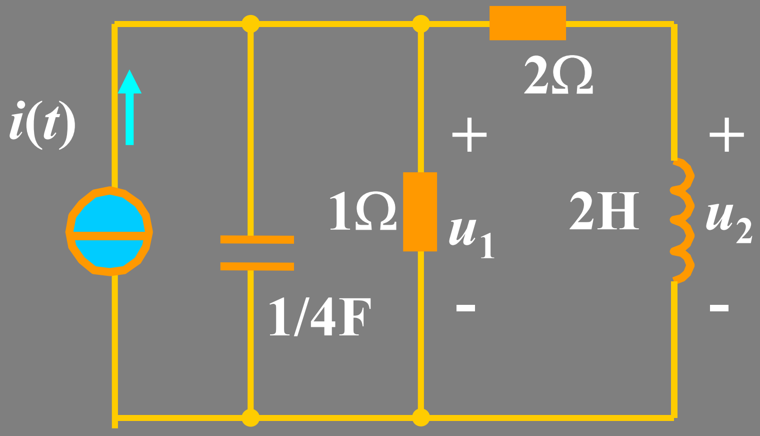
$$h(t)=u_C(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s+1/RC}\right]=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

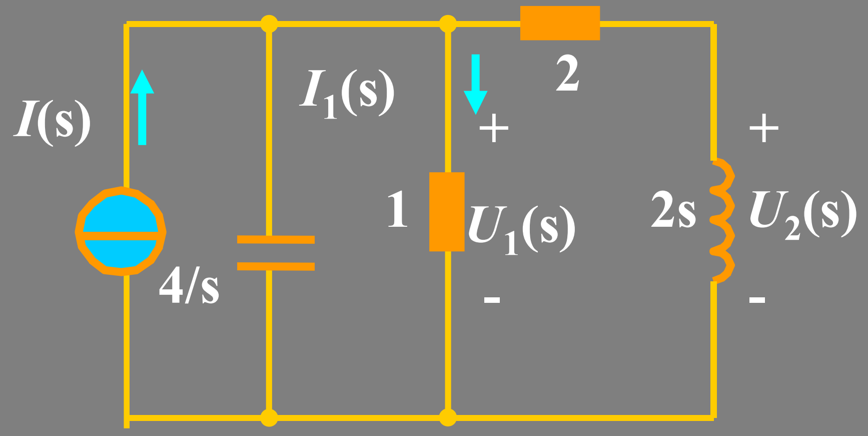
3. 网络函数的应用

由网络函数求任意激励下的零状态响应

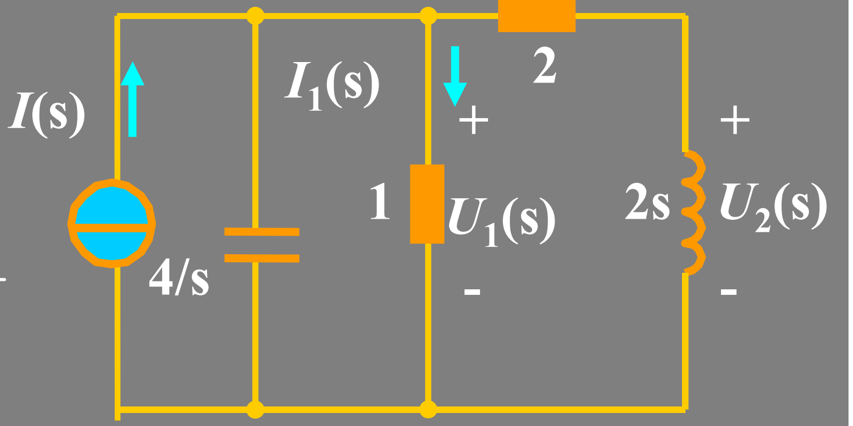
$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)} \longrightarrow R(s)=H(s)E(s)$$

例　图示电路，$i_s(t)=\varepsilon(t)$，求阶跃响应u_1、u_2.





解 $$H_1(s)=\frac{U_1(s)}{I_\delta(s)}$$



等效运算导纳

$$=\frac{1}{\frac{4}{s}+1+\frac{1}{2+2s}}=\frac{4s+4}{s^2+5s+6}$$

$$H_2(s)=\frac{U_2(s)}{I_\delta(s)}=\frac{2sU_1(s)}{2+2s}=\frac{4s}{s^2+5s+6}$$

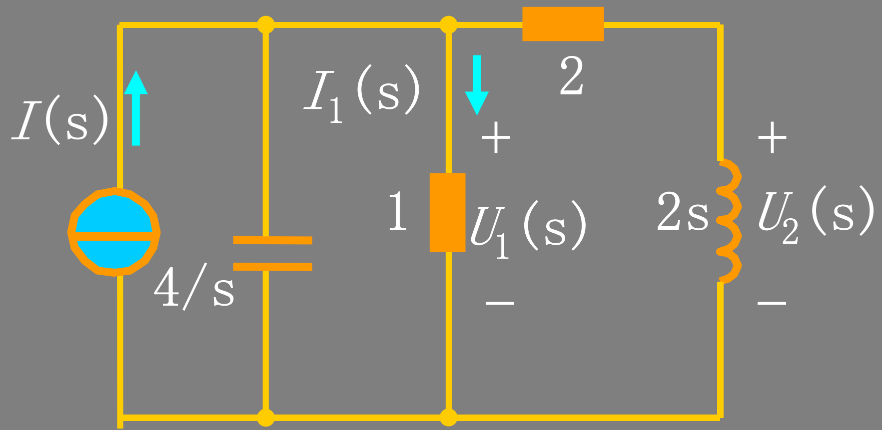
单位阶跃电流

$$U_1(s)=H_1(s)I(s)=\frac{4s+4}{s(s^2+5s+6)}$$

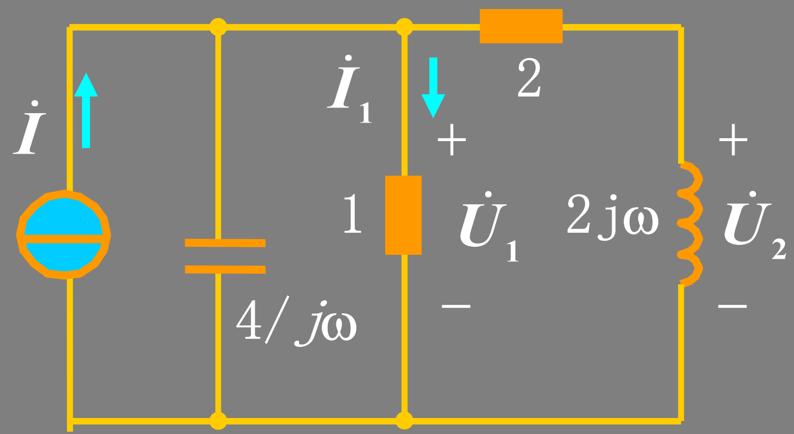
$$U_2(s)=H_2(s)I(s)=\frac{4s}{s(s^2+5s+6)}$$

$$u_1(t)=\frac{2}{3}+2e^{-2t}-\frac{8}{3}e^{-3t} \qquad u_2(t)=4e^{-2t}-4e^{-3t}$$

② 由网络函数确定正弦稳态响应



运算模型



相量模型

令：$sL \rightarrow j\omega L \quad \dfrac{1}{sC} \rightarrow \dfrac{1}{j\omega C} \quad U(s) \rightarrow \dot{U} \quad I(s) \rightarrow \dot{I}$

$H(\mathrm{s})$中令$\mathrm{s} = j\omega$得正弦稳态下的网络函数

得：$\dot{U}_1 = H_1(j\omega)\dot{I} \quad \dot{U}_2 = H_2(j\omega)\dot{I}$

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{\dot{R}}{\dot{E}}$$

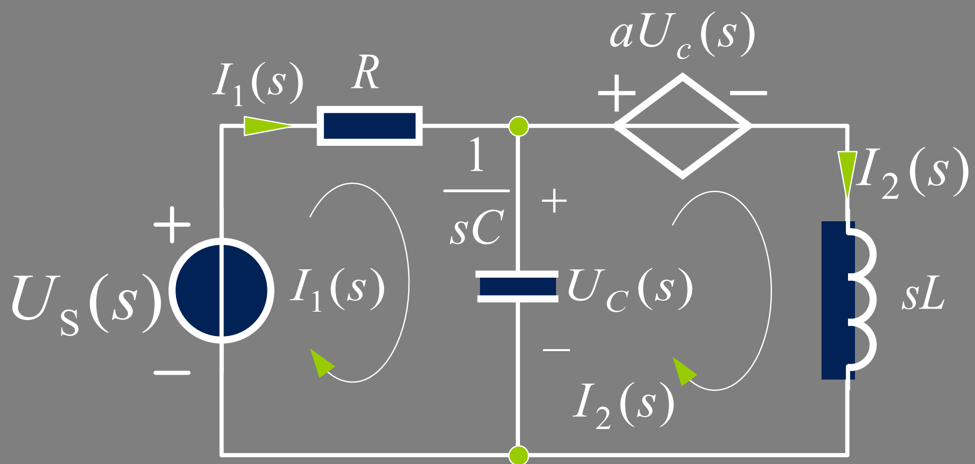
响应相量

激励相量

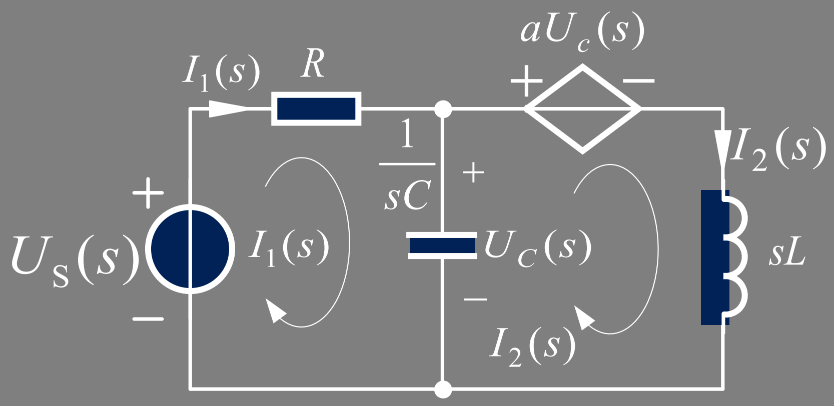
电路如图，已知 R=0.5，L=1H，C=1F，a =0.25 。

1) 定义网络函数 $H(s)=\dfrac{I_2(s)}{U_S(s)}$，求$H(s)$及其单位冲激特性$h(t)$

2) 求当 $u_S(t)=3e^{-t}\varepsilon(t)\text{V}$ 时的响应 $i_2(t)$ 。



解 (1)列回路电流方程



$$\begin{cases} (R+\frac{1}{sC})I_1(s)-\frac{1}{sC}I_2(s)=U_S(s) \\ -\frac{1}{sC}I_1(s)+(\frac{1}{sC}+sL)I_2(s)=-aU_C(s) \\ U_C(s)=\frac{1}{sC}[I_1(s)-I_2(s)] \end{cases}$$

代数整理得

$$\begin{cases} (0.5s+1)I_1(s)-I_2(s)=sU_S(s) \\ -0.75I_1(s)+(s^2+0.75)I_2(s)=0 \end{cases}$$

$$I_2(s)=\frac{1.5U_S(s)}{s^2+2s+0.75} \Rightarrow H(s)=\frac{I_2(s)}{U_S(s)}=\frac{1.5}{s^2+2s+0.75}=\frac{1.5}{s+0.5}+\frac{-1.5}{s+1.5}$$

$$\therefore \quad h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=1.5(e^{-0.5t}-e^{-1.5t})\varepsilon(t)$$

(2) 当 $u_S(t) = 3e^{-t}\varepsilon(t)$V时

$$U_S(s) = \mathcal{L}\{u_S(t)\} = \frac{3}{s+1}$$

$$I_2(s) = H(s)U_S(s) = \frac{1.5}{s^2+2s+0.75} \cdot \frac{3}{(s+1)}$$

$$= \frac{1.5}{(s+0.5)(s+1.5)} \cdot \frac{3}{(s+1)}$$

$$= \frac{9\mathrm{A}}{s+0.5} + \frac{9\mathrm{A}}{s+1.5} + \frac{-18\mathrm{A}}{s+1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{i_2(t) = (9e^{-0.5t} + 9e^{-1.5t} - 18e^{-t})\mathrm{A} \qquad (t \geq 0)}$$

14.7 网络函数的极点和零点

网络函数的 $H(s)$ 的分母和分子都是 s 的多项式，故一般形式为

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$$

$$=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

当$s=z_1\cdots z_m$时$H(s)=0$，称$z_1\cdots z_m$为网络函数的零点

当$s=p_1\cdots p_n$时$H(s)=\infty$，称$p_1\cdots p_n$为网络函数的极点

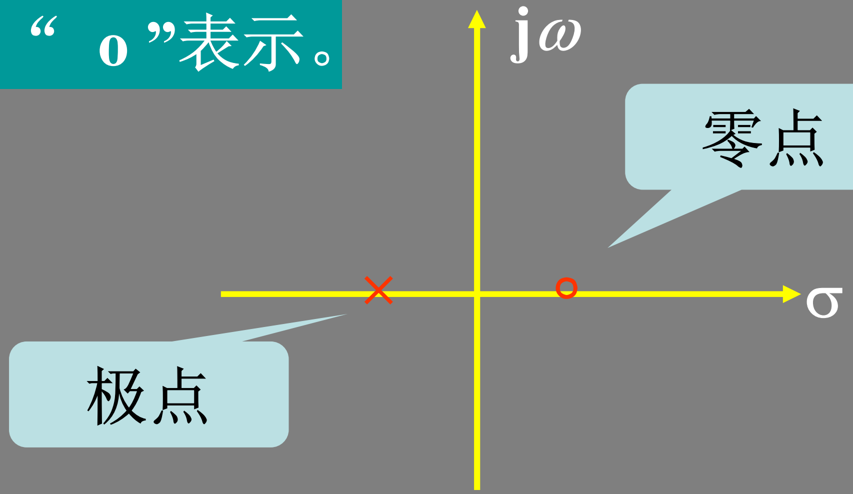
$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

1. 复平面（或s平面）

$$s=\sigma+j\omega$$

极点用“×”表示，零点用“ o ”表示。

零、极点分布图



例 $H(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}=\dfrac{2s^2-12s+16}{s^3+4s^2+6s+3}$ 绘出其极零点图

解 $N(s)=2s^2-12s+16=2(s-2)(s-4)$

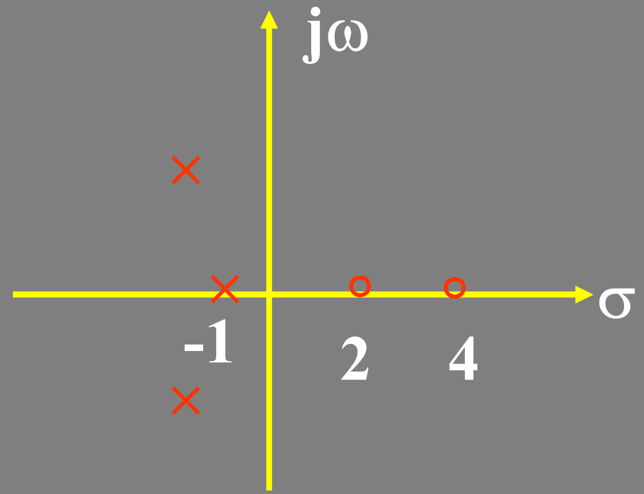
$H(s)$的零点为$z_1=2,\ \ z_2=4$

$$D(s)=s^3+4s^2+6s+3=(s+1)(s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})(s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})$$

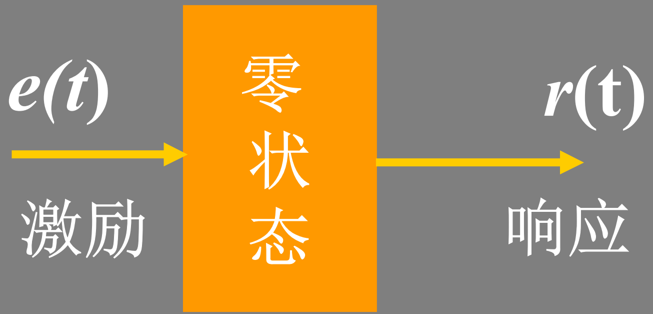
$H(s)$的极点为

$p_1=-1$

$p_{2,3}=-\dfrac{3}{2}\pm j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



14.8 极点、零点与冲激响应



$$R(s)=H(s)E(s)$$

当$e(t)=\delta(t)$时，$E(s)=1,$

$$R(s)=H(s),\ r(t)=h(t)$$

$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]$, $h(t)$称为冲激响应

网络函数和冲激响应构成 一对拉氏变换对

H*(*s*)** 和E*(*s*)** 一般为有理分式，因此可写为

$$R(s)=H(s)E(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\cdot\frac{P(s)}{Q(s)}$$

式中 $H(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)},\ E(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$

其中 $N(s)$、$D(s)$、$P(s)$、$Q(s)$ 都是**s**的多项式

用部分分式法求响应的原函数时， $D(s)Q(s)=0$ 的根

将包含***D*(*s*)=0,** 和***Q*(*s*)=0** 的根。

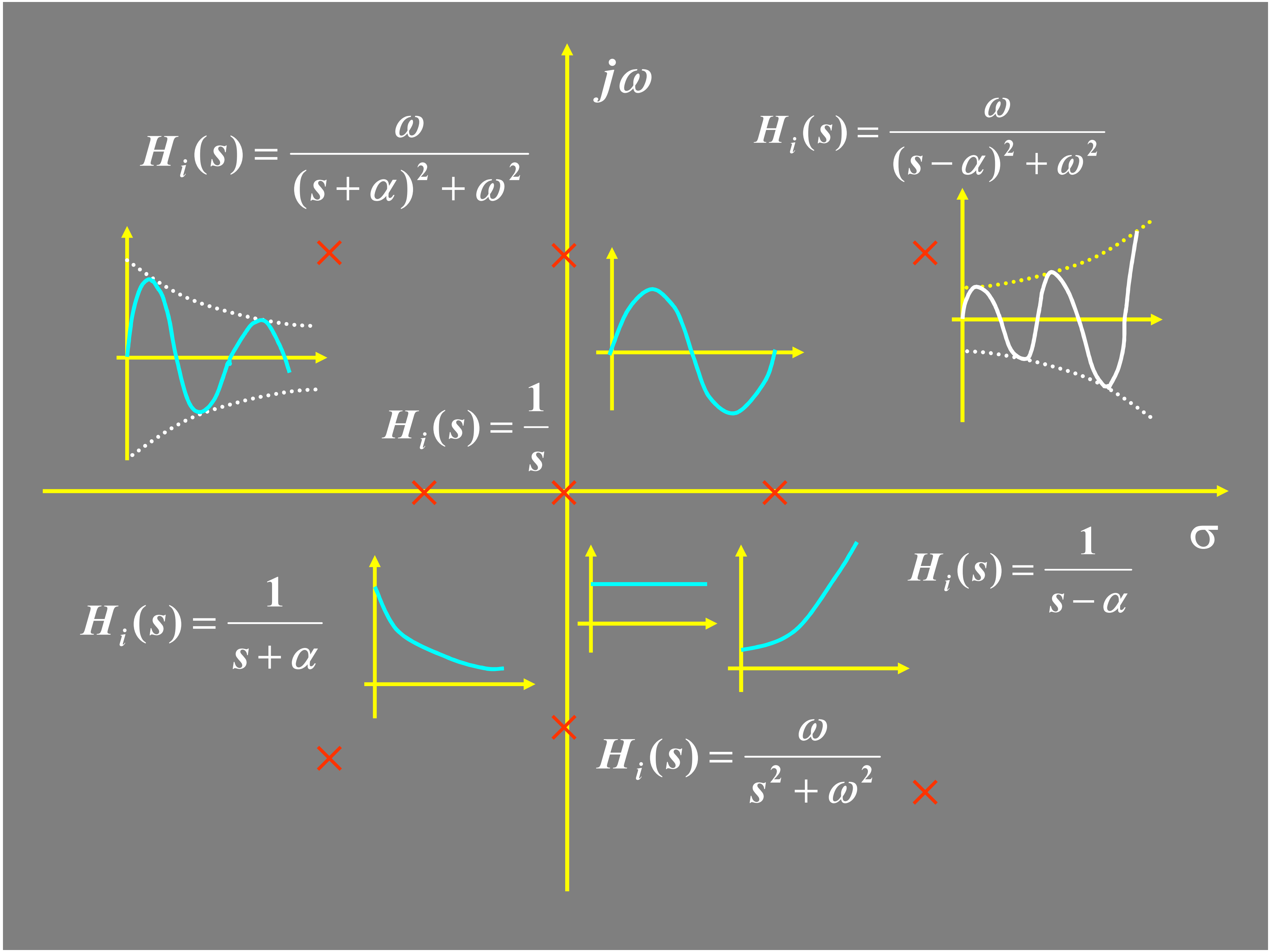
响应中包含$Q(s)=0$的根的那些项属于强制分量，响应中包含$D(s)=0$的根的那些项（网络函数的极点）属于自由分量。

$h(t)$的特性即为时域响应中自由分量的特性，因此分析网络函数$H(s)$的极点与冲激响应的关系就可预见时域响应的特点。

若网络函数为真分式且分母具有单根，则网络的冲激响应为

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=\mathscr{L}^{-1}[\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}]=\sum_{i=1}^{n}K_i e^{p_i t}$$

显然极点位置不同，响应性质不同，极点反映网络响应的动态过程中自由分量的变化规律。



$j\omega$
$H_i(s)=\dfrac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$H_i(s)=\dfrac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$H_i(s)=\dfrac{1}{s}$
σ
$H_i(s)=\dfrac{1}{s-\alpha}$
$H_i(s)=\dfrac{1}{s+\alpha}$
$H_i(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

网络函数的极点位置与单位冲激特性的关系概括如下：

p_k ⇒ 位于左半平面时，收敛

位于右半平面时，发散

p_k ⇒ 位于实轴上时，响应非振荡

位于虚轴上时，临界稳定

否则，均为振荡

$H(s)$ ⇒ 所有极点位于左半平面，暂态过程稳定

若有一个以上极点位于右半平面，暂态过程不稳定

例 已知网络函数有两个极点分别在**s=0**和**s=−1**处，一个单零点在s=1处，且有 $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=10$，求$H$(s)和$h(t)$。

解 由已知的零、极点可知：

$$H(s)=\frac{k(s-1)}{s(s+1)}$$

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{k(s-1)}{s(s+1)}\right]=-k+2ke^{-t}$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t)=10 \quad \rightarrow \quad k=-10$$

$$\therefore \quad H(s)=\frac{-10(s-1)}{s(s+1)} \qquad h(t)=10-20\mathrm{e}^{-t}$$

14.9 极点、零点与频率响应

令网络函数***H*(s)**中复频率**s=jω**，分析***H*(jω)**随ω变化的特性，根据网络函数零、极点的分布可以确定正弦输入时的频率响应。

对于某一固定的角频率ω

$$H(j\omega)=H_0\frac{\prod_{i=1}^{m}(j\omega-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(j\omega-p_j)}=|H(j\omega)|e^{j\varphi}$$

$$|H(j\omega)|=H_0\frac{\prod_{i=1}^{m}|(j\omega-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(j\omega-p_j)|}$$

幅频特性

$$\varphi=\arg[H(j\omega)]=\sum_{i=1}^{m}\arg(j\omega-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\arg(j\omega-p_j)$$

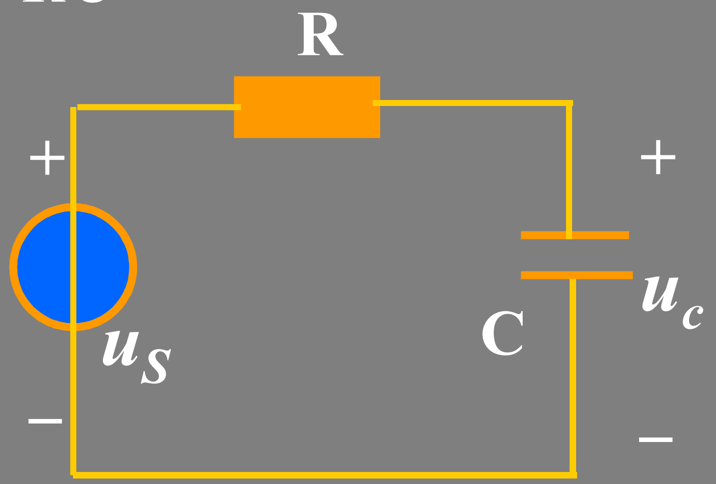
相频特性

例 定性分析RC串联电路以电压u_C为输出时电路的频率响应。

解 $$H(s)=\frac{U_C(s)}{U_S(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$$

一个极点 $$s=\frac{-1}{RC}$$

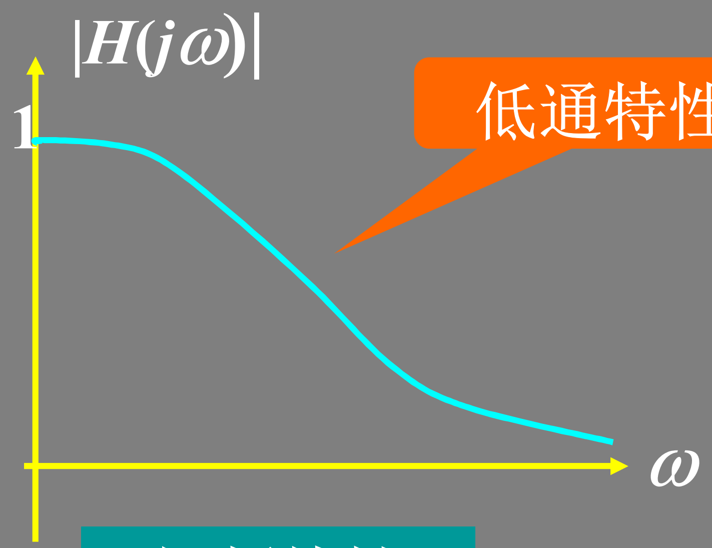
设$H_0=\dfrac{1}{RC}$， $s=j\omega$



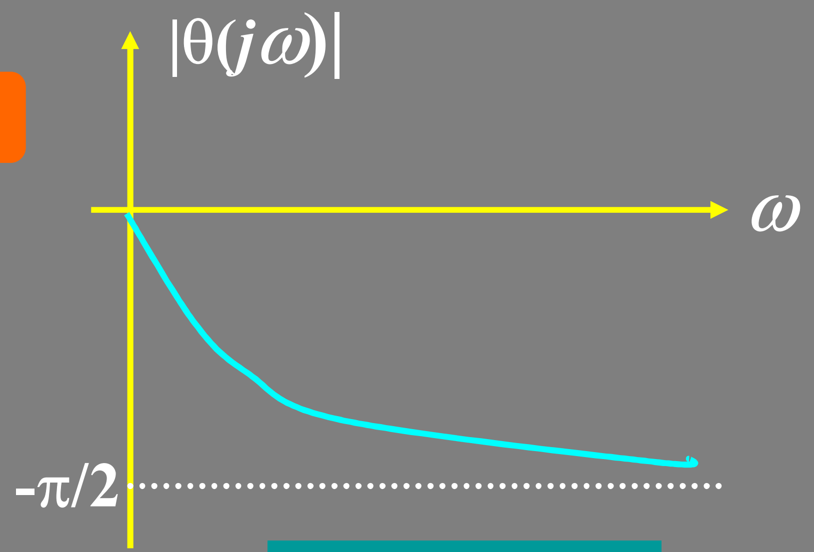
$$H(j\omega)=\frac{H_0}{j\omega+1/RC}=\left|H(j\omega)\right|\angle\theta(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{H_0}{j\omega+1/RC}=\left|H(j\omega)\right|\angle\theta(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{H_0}{j\omega+1/RC}=\frac{H_0}{j\omega-p_1}=\frac{H_0}{Me^{j\theta}}$$



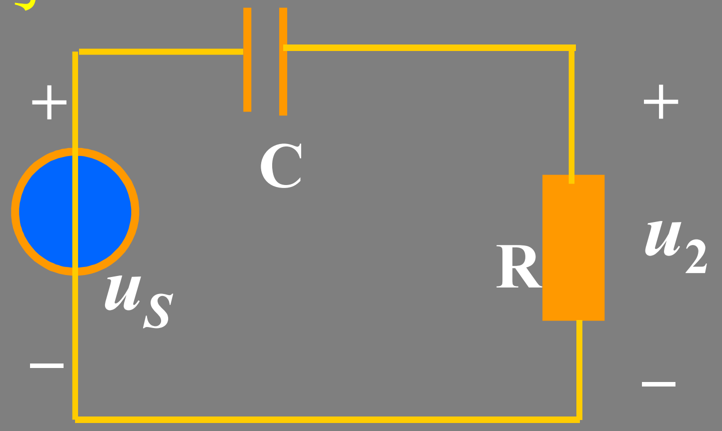
幅频特性



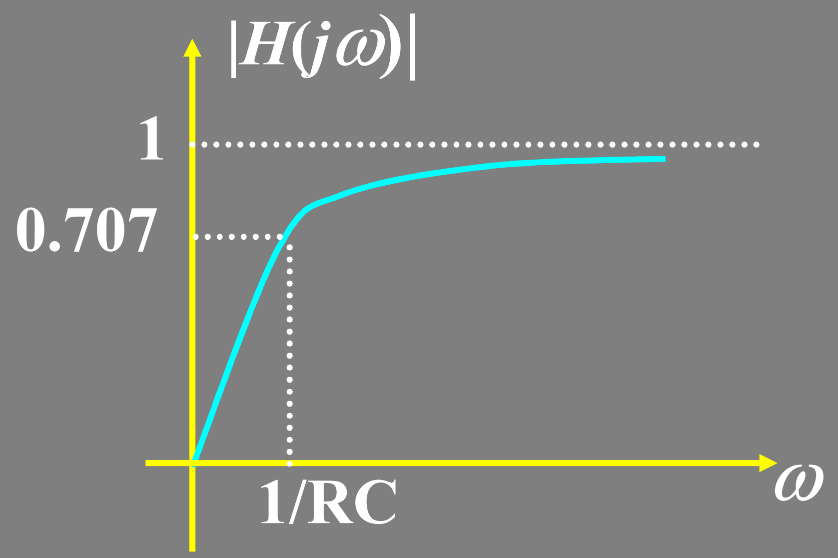
相频特性

若以电压u_R为输出时电路的频率响应为

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_s(s)}=\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$



$$H(j\omega)=\frac{Ne^{j\psi}}{Me^{j\theta}}$$



卷积定理的应用

1. 拉氏变换的卷积定理

卷积积分

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

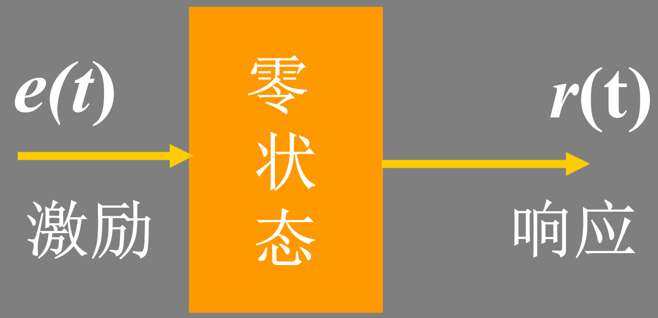
$$\int_0^t f_1(\xi) f_2(t-\xi) d\xi = \int_0^t f_1(\mathrm{t}-\xi) f_2(\xi) d\xi$$

卷积定理

若 $\mathscr{L}[f_1(t)] = F_1(s) \quad \mathscr{L}[f_2(t)] = F_2(s)$

则 $\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) F_2(s)$

2. 应用卷积定理求电路响应



$$R(s) = H(s)E(s)$$

当$e(t) = \delta(t)$时，$E(s) = 1,$

$$R(s) = H(s),\ \ r(t) = h(t)$$

$$r(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[H(s)E(s)\right] = h(t) * e(t)$$

$$= \int_0^t e(t-\xi)h(\xi)d\xi = \int_0^t e(\xi)h(t-\xi)d\xi$$

例 已知图示电路$u_s = 0.6e^{-2t}$，冲激响应$h(t) = 5e^{-t}$，求$u_C(t)$

解1 $u_C(t) = r(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)E(s)]$

$$U_C(s) = \frac{5}{s+1} \cdot \frac{0.6}{s+2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$K_1=3$，$K_2=-3$

$$u_c = -3e^{-2t} + 3e^{-t}$$

已知图示电路$u_s = 0.6e^{-2t}$，冲激响应$h(t) = 5e^{-t}$，求$u_C(t)$

解2

$$u_C(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[H(s)E(s)\right] = h(t) * e(t)$$

$$= \int_0^t h(t-\xi)u_S(\xi)d\xi = \int_0^t 5e^{-(t-\xi)} \times 0.6e^{-2\xi}d\xi$$

$$= \int_0^t 3e^{-(t+\xi)}d\xi = 3e^{-t}\int_0^t e^{-\xi}d\xi = 3(e^{-t} - e^{-2t})$$

第十四章

结束