第七章 一阶电路和二阶电路的时域分析

1. 动态电路方程的建立及初始条件的确定；

2. 一阶电路的零输入响应、零状态响应；

3. 一阶电路的全响应（三要素法）。

重点　初始条件的确定

三要素法

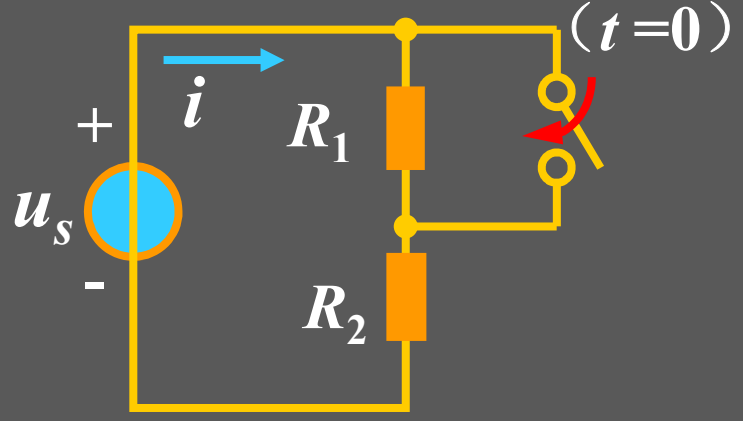
下 页

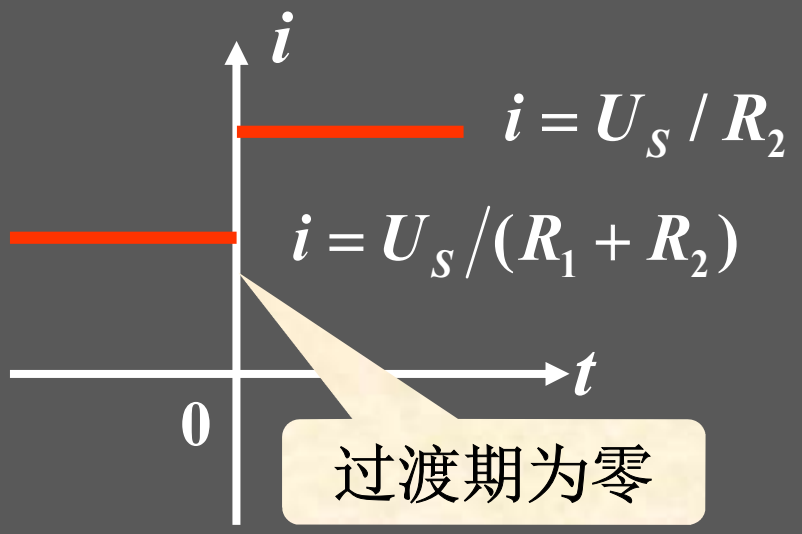
7.1 动态电路的方程及其初始条件

1. 动态电路 含有动态元件电容或电感的电路称动态电路。

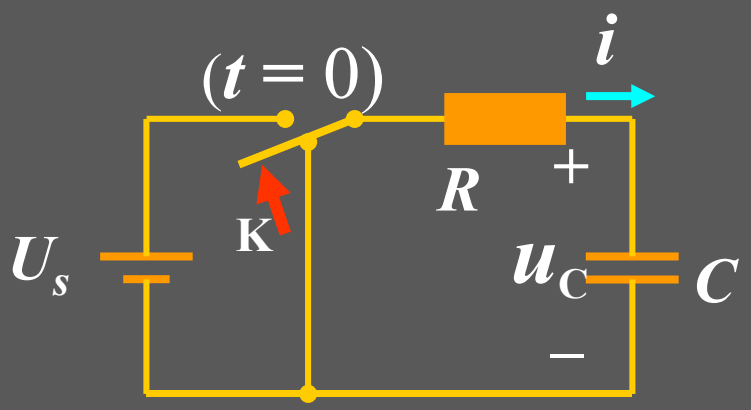
特点 当动态电路状态发生改变时（换路）需要经历一个变化过程才能达到新的稳定状态。这个变化过程称为电路的过渡过程。

例 电阻电路





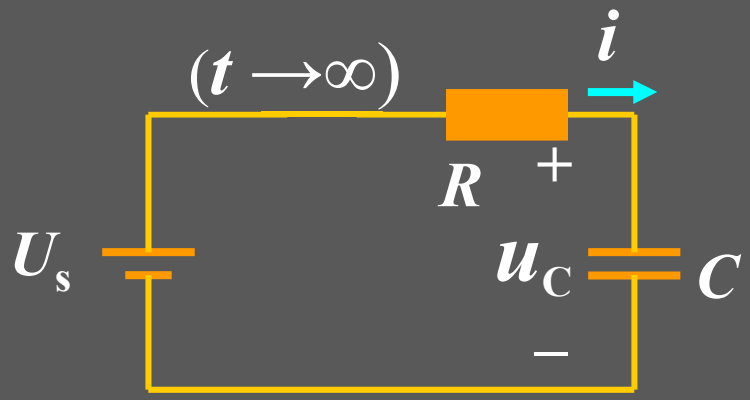
电容电路



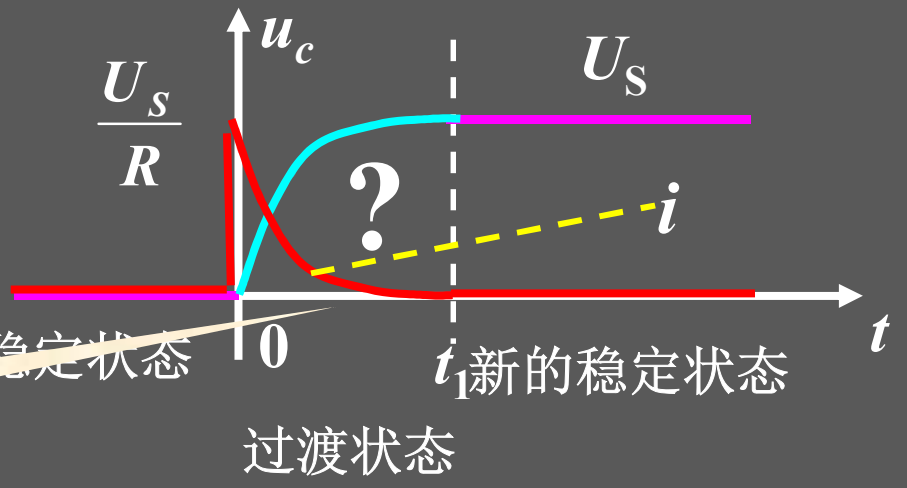
K未动作前，电路处于稳定状态

$$i=0\ ,\quad u_C=0$$

K接通电源后很长时间，电容充电完毕，电路达到新的稳定状态

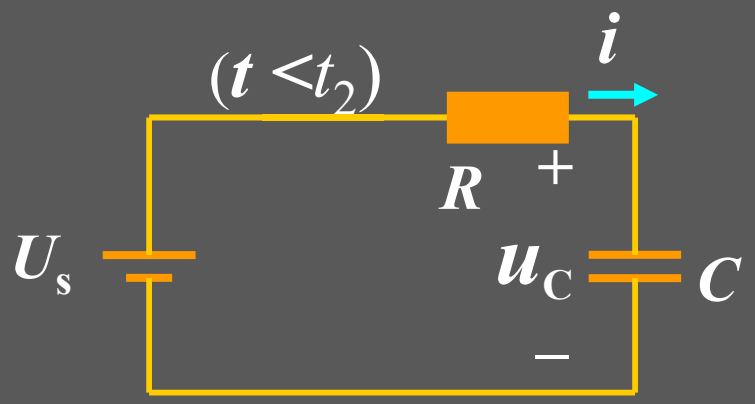


$$i=0\ ,\quad u_C=U_s$$



前一个稳定状态

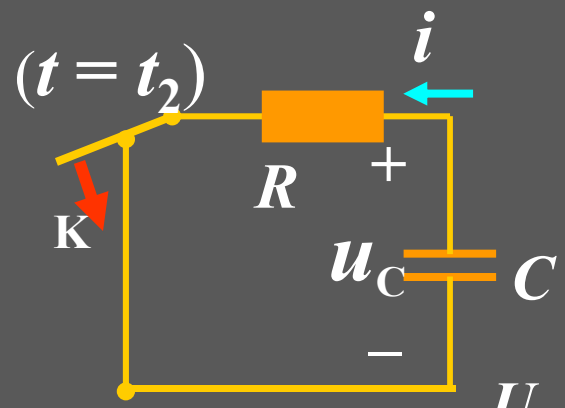
有一过渡期



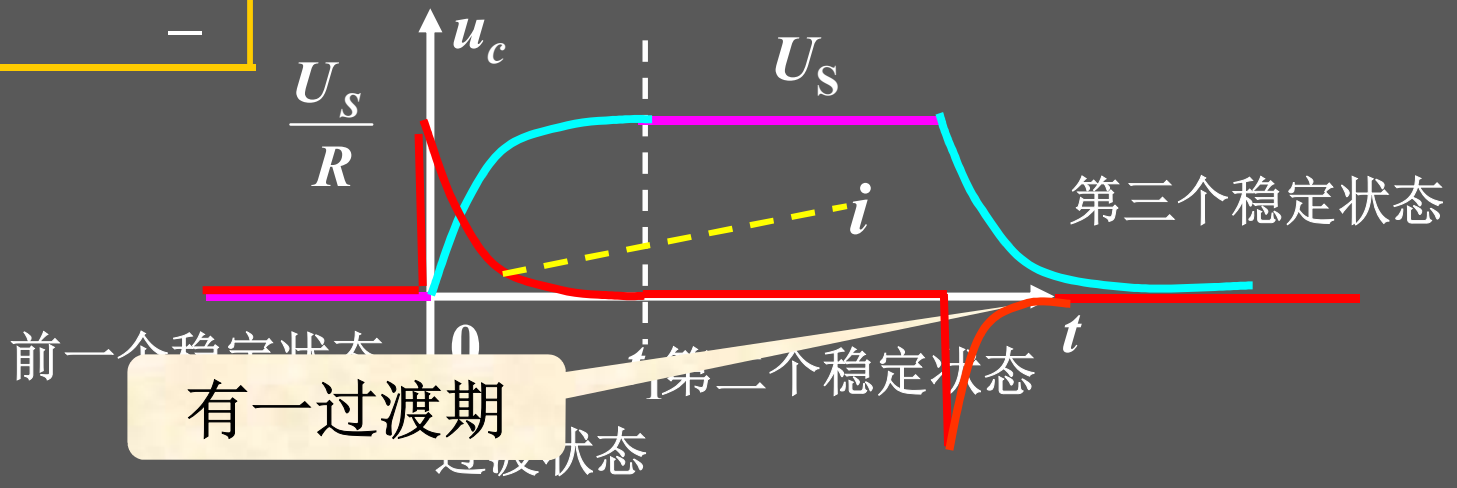
K未动作前，电路处于稳定状态

$$i = 0 \ , \quad u_C = U_s$$

K动作后很长时间，电容放电完毕，电路达到新的稳定状态

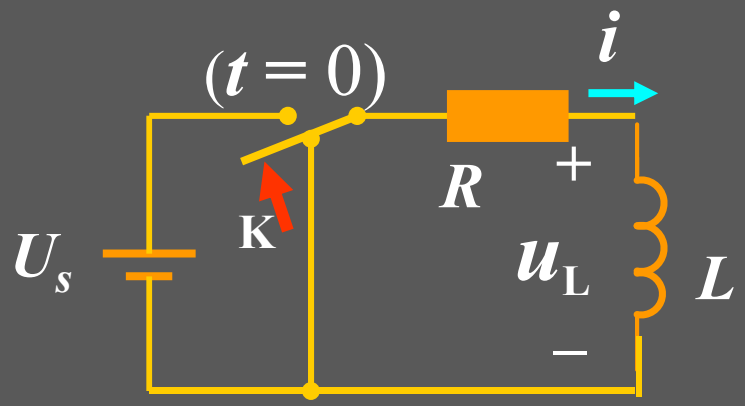


$$i = 0 \ , \quad u_C = 0$$



有一过渡期

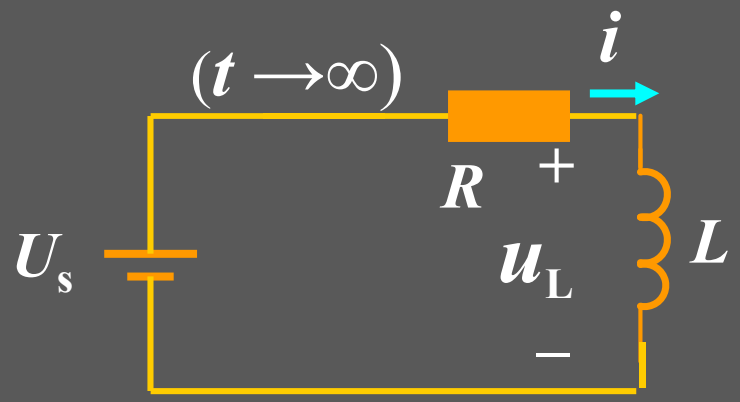
电感电路



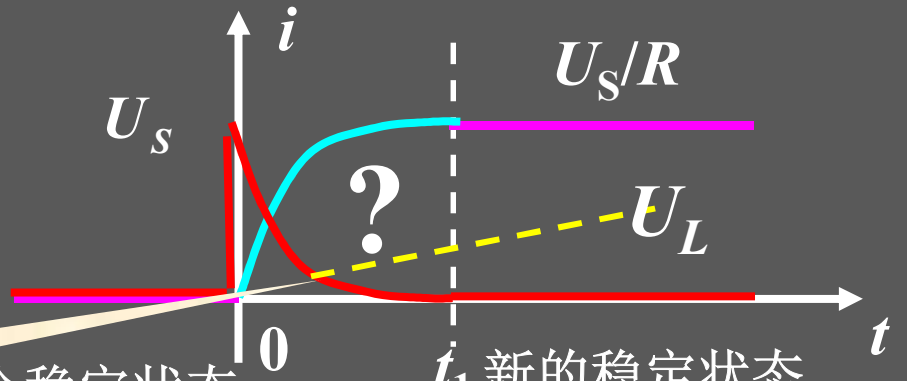
K未动作前，电路处于稳定状态

$$i = 0 \ , \quad u_L = 0$$

K接通电源后很长时间，电路达到新的稳定状态，电感视为短路



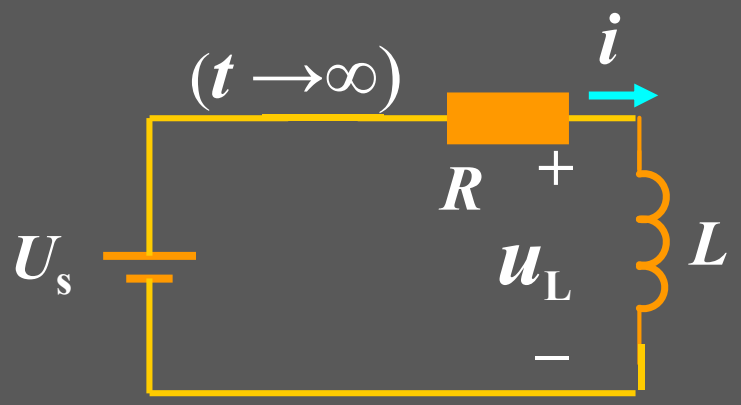
$$u_L = 0, \quad i = U_s / R$$



有一过渡期

前一个稳定状态

过渡状态

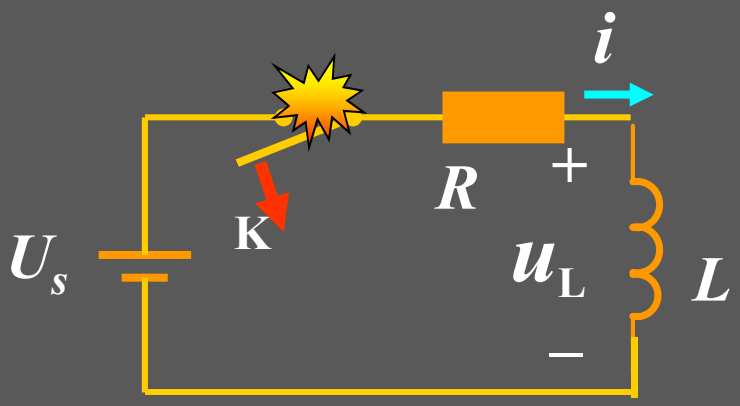


K未动作前，电路处于稳定状态

$u_L = 0, \quad i = U_s/R$

K断开瞬间

$i = 0 \ , \quad u_L = \infty$



注意工程实际中的过电压过电流现象

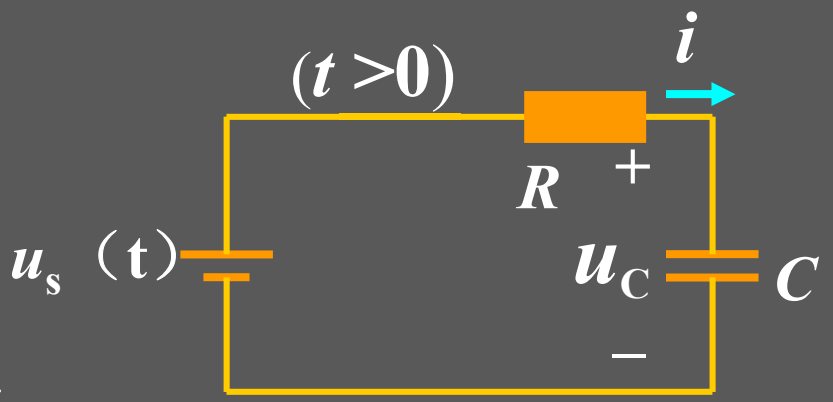
换路 → 电路结构、状态发生变化 { 支路接入或断开；电路参数变化

过渡过程产生的原因 →

电路内部含有储能元件 L 、C，电路在换路时能量发生变化，而能量的储存和释放都需要一定的时间来完成。

$$p = \frac{\Delta w}{\Delta t} \qquad \Delta t \Rightarrow 0 \qquad p \Rightarrow \infty$$

2. 动态电路的方程



应用KVL和电容的VCR得：

$$Ri + u_c = u_S(t) \qquad i = C\frac{du_c}{dt}$$

$$\rightarrow \quad RC\frac{du_c}{dt} + u_c = u_S(t)$$

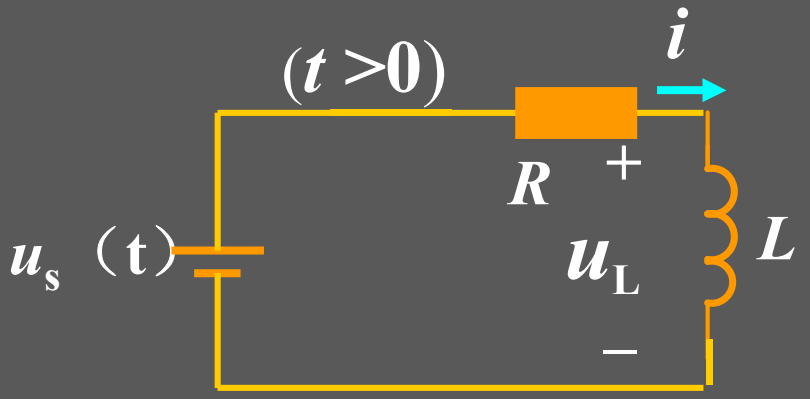
若以电流为变量：

$$Ri + \frac{1}{C}\int idt = u_S(t)$$

$$\rightarrow \quad R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du_S(t)}{dt}$$

应用KVL和电感的VCR得：

$$Ri + u_L = u_S(t) \qquad u_L = L\frac{di}{dt}$$



$$\rightarrow \quad Ri + L\frac{di}{dt} = u_S(t)$$

若以电感电压为变量：

$$\frac{R}{L}\int u_L dt + u_L = u_S(t)$$

$$\rightarrow \quad \frac{R}{L}u_L + \frac{du_L}{dt} = \frac{du_S(t)}{dt}$$

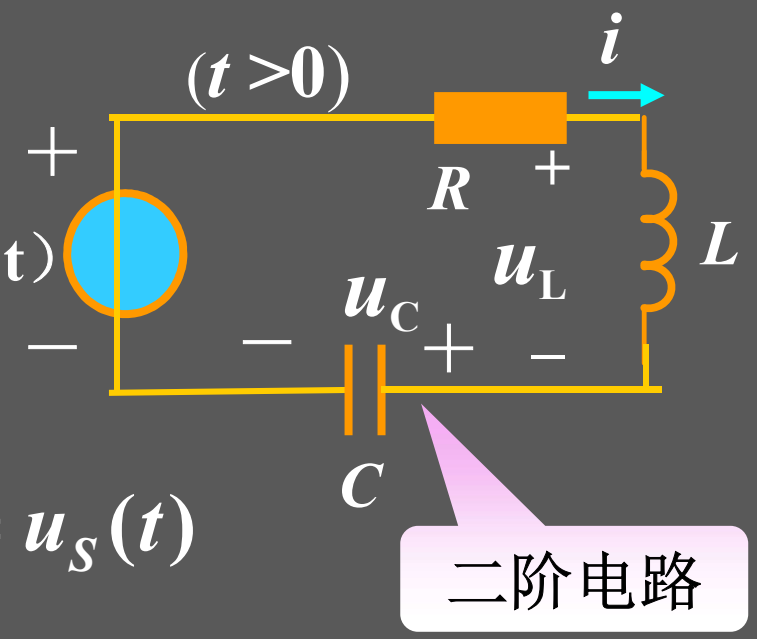
一阶电路

有源电阻电路

一个动态元件

$$Ri + u_L + u_c = u_S(t)$$

$$i = C\frac{du_c}{dt} \qquad u_L = L\frac{di}{dt}$$



$$\rightarrow LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = u_S(t)$$

若以电流为变量：

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = u_S(t)$$

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = \frac{du_S(t)}{dt}$$

结论：（1）描述动态电路的电路方程为微分方程；

（2）动态电路方程的阶数等于电路中动态元件的个数；

一阶电路 → 一阶电路中只有一个动态元件,描述电路的方程是一阶线性微分方程。

$$a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=e(t)\quad t\geq 0$$

二阶电路 → 二阶电路中有二个动态元件,描述电路的方程是二阶线性微分方程。

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=e(t)\quad t\geq 0$$

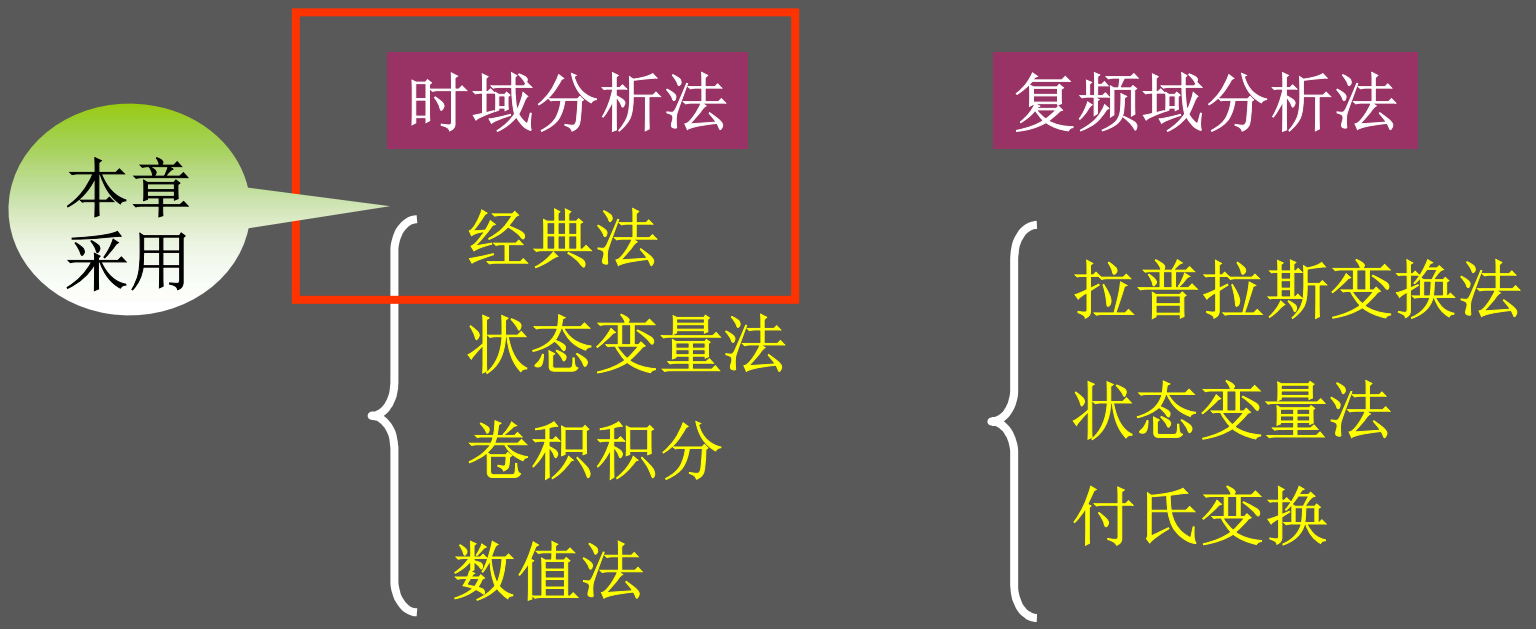
高阶电路 → 电路中有多个动态元件，描述电路的方程是高阶微分方程。

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e(t) \quad t \geq 0$$

动态电路的分析方法

（1）根据KVl、KCL和VCR建立微分方程

（2）求解微分方程



工程中高阶微分方程应用计算机辅助分析求解。

稳态分析和动态分析的区别

稳态

- 恒定或周期性激励
- 换路发生很长时间后状态
- 微分方程的特解

动态

- 任意激励
- 换路发生后的整个过程
- 微分方程的一般解

$$a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=U_S \qquad t\Rightarrow\infty \qquad \frac{dx}{dt}=0$$

$$a_0x=U_S$$

3. 电路的初始条件

(1) $t=0^+$与$t=0^-$的概念

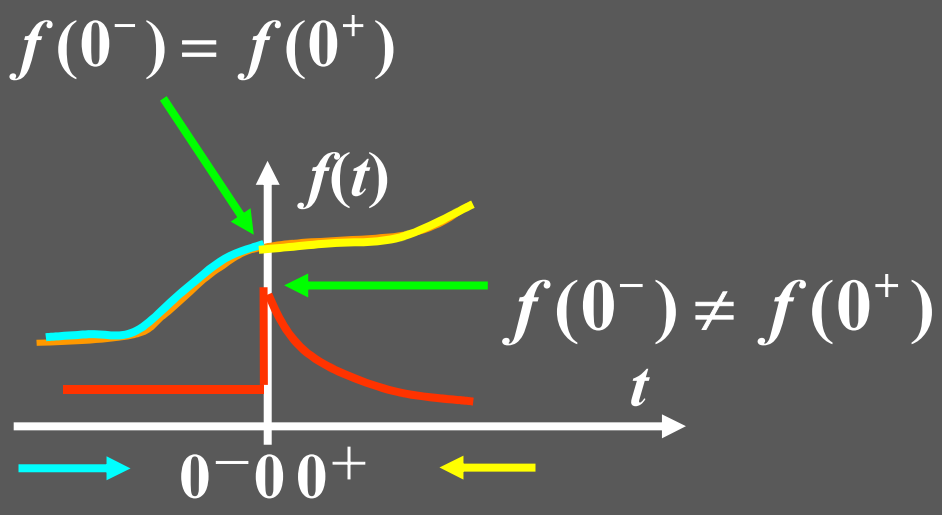
认为换路在 t=0时刻进行

0^-　换路前一瞬间

0^+　换路后一瞬间

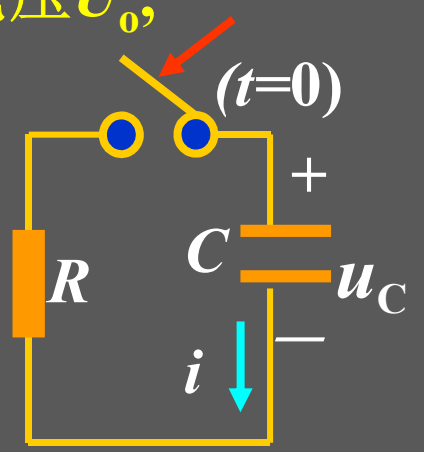
$$f(0^-)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t)$$

$$f(0^+)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$



初始条件为 $t=0^+$时u，i及其各阶导数的值

例　图示为电容放电电路，电容原先带有电压U_o，求开关闭合后电容电压随时间的变化。



解　$Ri + u_c = 0 \quad (t \geq 0)$

$$\rightarrow \quad RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

特征根方程：$RCp + 1 = 0 \rightarrow p = -1/RC$

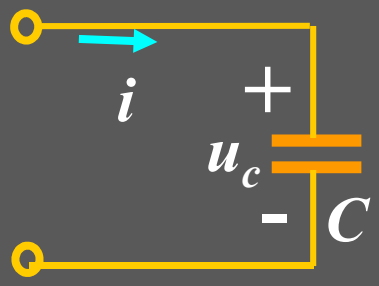
得通解：$u_c(t) = ke^{pt} = ke^{-\frac{t}{RC}}$

代入初始条件得：$k = U_o \rightarrow u_c(t) = U_o e^{-\frac{t}{RC}}$

说明在动态电路的分析中，初始条件是得到确定解答的必需条件。

(2) 电容的初始条件

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$



$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$t=0^+$时刻

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i(\xi)\mathrm{d}\xi \quad (\int_{0^-}^{0^+} i(\xi)\mathrm{d}\xi \to 0)$$

当$i(\xi)$为有限值时

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)$$

$q=Cu_C$

$$q(0^+)=q(0^-)$$

电荷守恒

结论

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，

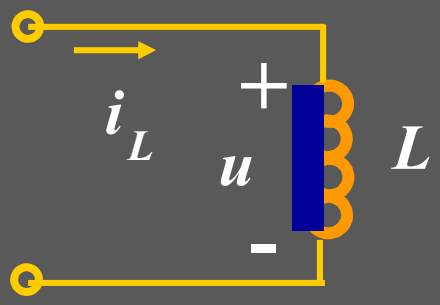
则电容电压（电荷）换路前后保持不变。

(3) 电感的初始条件

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0^-}u(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{t}u(\xi))\mathrm{d}\xi$$

$$=i_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{t}u(\xi)d\xi$$



$t=0^+$时刻

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}u(\xi)d\xi$$

0

当u为有限值时

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)$$

$$\psi=Li_L$$

$$\psi_L(0^+)=\psi_L(0^-)$$

磁链守恒

结论

换路瞬间，若电感电压保持为有限值，
则电感电流（磁链）换路前后保持不变。

（4）换路定律

$$\begin{cases} q_c(0^+) = q_c(0^-) \\ u_C(0^+) = u_C(0^-) \end{cases}$$

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，则电容电压（电荷）换路前后保持不变。

$$\begin{cases} \psi_L(0^+) = \psi_L(0^-) \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) \end{cases}$$

换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流（磁链）换路前后保持不变。

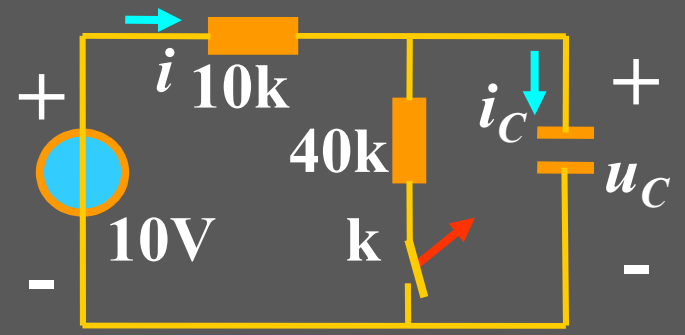
注意：

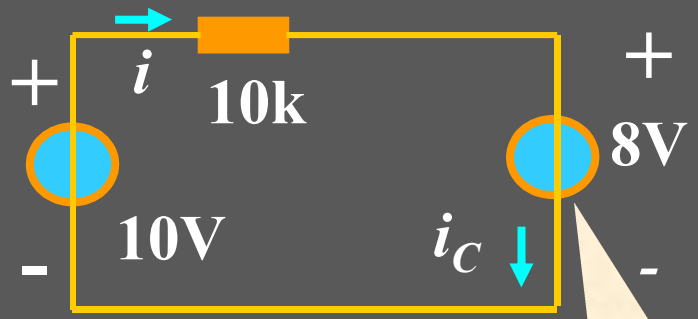
（1）电容电流和电感电压为有限值是换路定律成立的条件。

（2）换路定律反映了能量不能跃变。

5. 电路初始值的确定

例1 求 $i_C(0^+)$

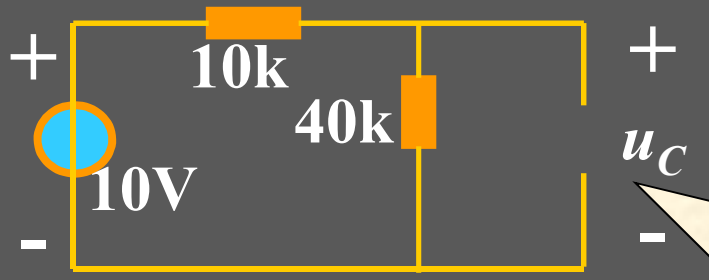




0^+等效电路

电容用电压源替代

(1) 由0^-电路求 $u_C(0^-)$或$i_L(0^-)$



电容开路

$$u_C(0^-)=8\text{V}$$

(2) 由换路定律

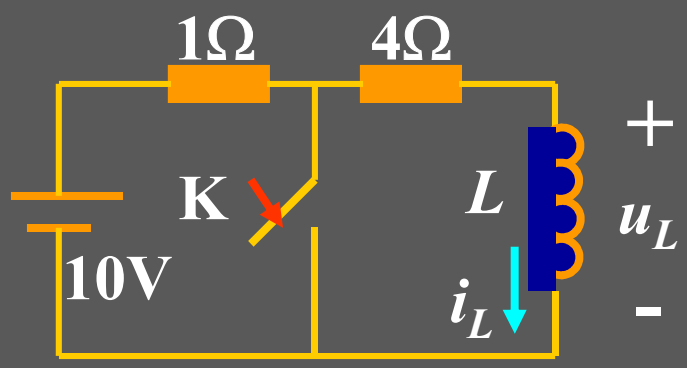
$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=8\text{V}$$

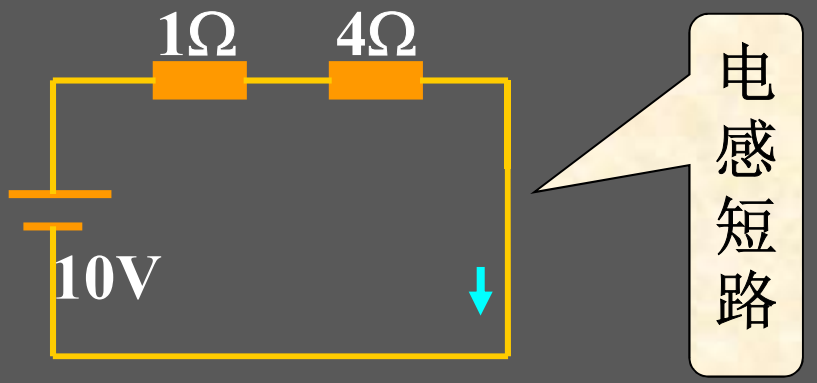
(3) 由0^+等效电路求 $i_C(0^+)$

$$i_C(0^+)=\frac{10-8}{10}=0.2\text{mA}$$

$i_C(0^-)=0 \neq i_C(0_+)$

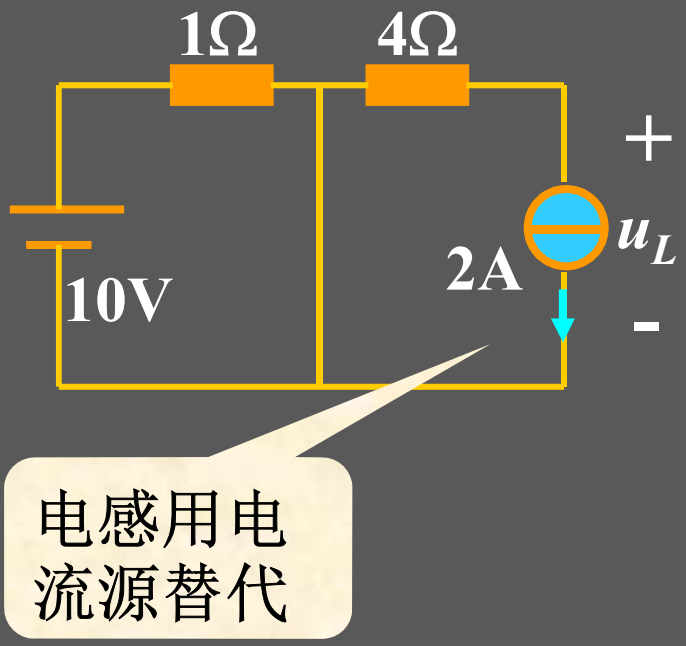
例 2　$t=0$时闭合开关k，求 $u_L(0^+)$　**解**　先求 $i_L(0^-)$





$$i_L(0^-)=\frac{10}{1+4}=2A$$

0^+电路



$\because u_L(0^-)=0 \quad \therefore u_L(0^+)=0$

由换路定律：

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=2A$$

$$u_L(0^+)=-2\times 4=-8V$$

求初始值的步骤：

1. 由换路前电路（一般为稳定状态）求$u_C(0^-)$和$i_L(0^-)$；

2. 由换路定律得 $u_C(0^+)$ 和 $i_L(0^+)$。

3. 画0^+等效电路。

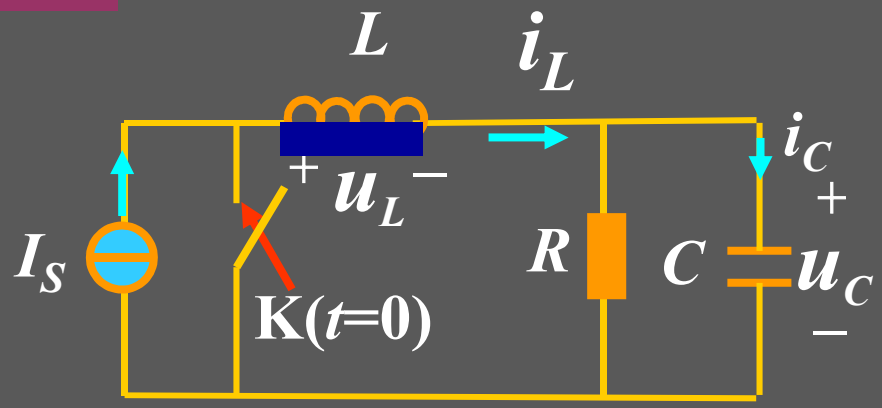
   a. 换路后的电路

   b. 电容（电感）用电压源（电流源）替代。

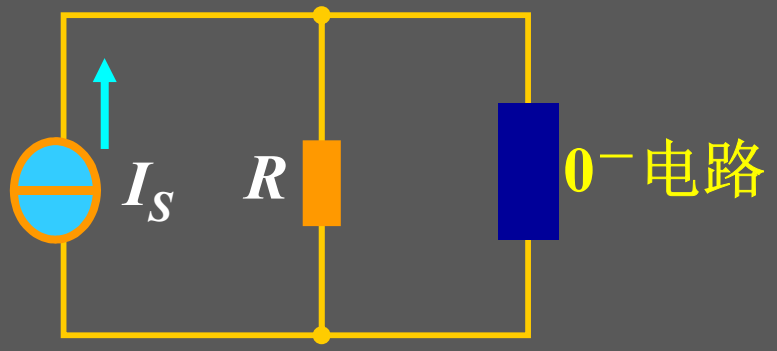
   （取0^+时刻值，方向与原假定的电容电压、电感电流方向相同）。

4. 由0^+电路求所需各变量的0^+值。

例3 求 $i_C(0^+)$ ，$u_L(0^+)$



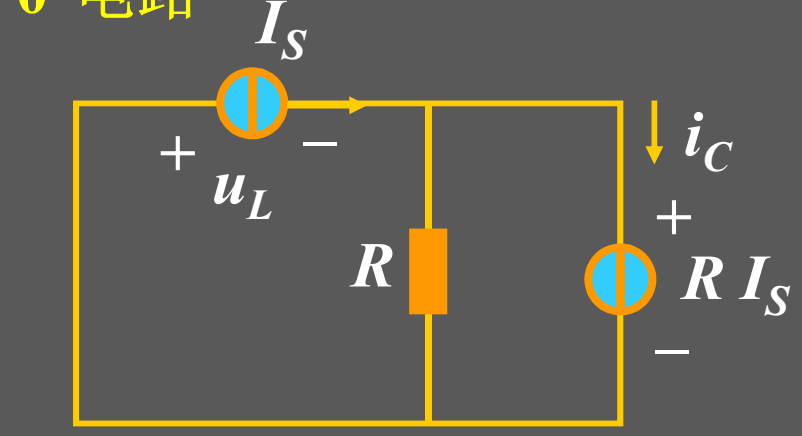
解 由0⁻电路得：



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_S$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = RI_S$$

0⁺电路

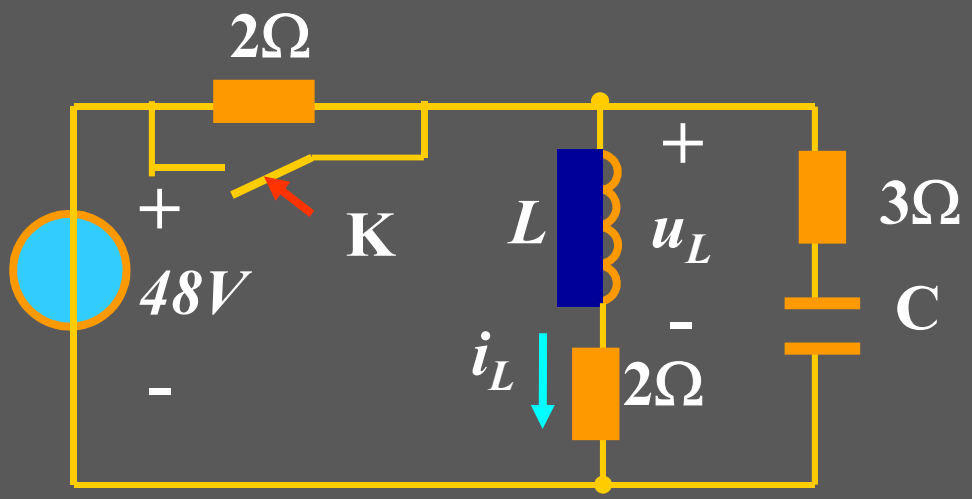


由0⁺电路得：

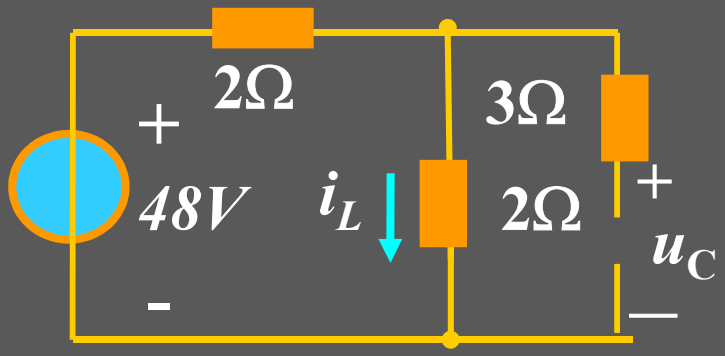
$$i_C(0^+) = I_s - \frac{RI_S}{R} = 0$$

$$u_L(0^+) = -RI_S$$

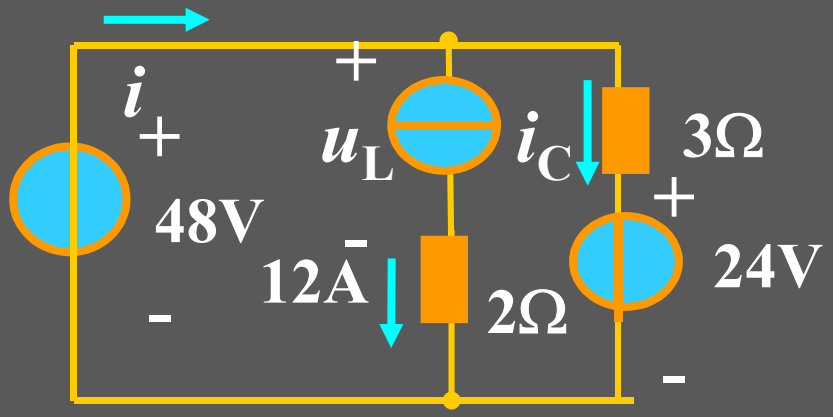
例3　求K闭合瞬间各支路电流和电感电压



解　由0^-电路得：



由0^+电路得：



$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=48/4=12A$$

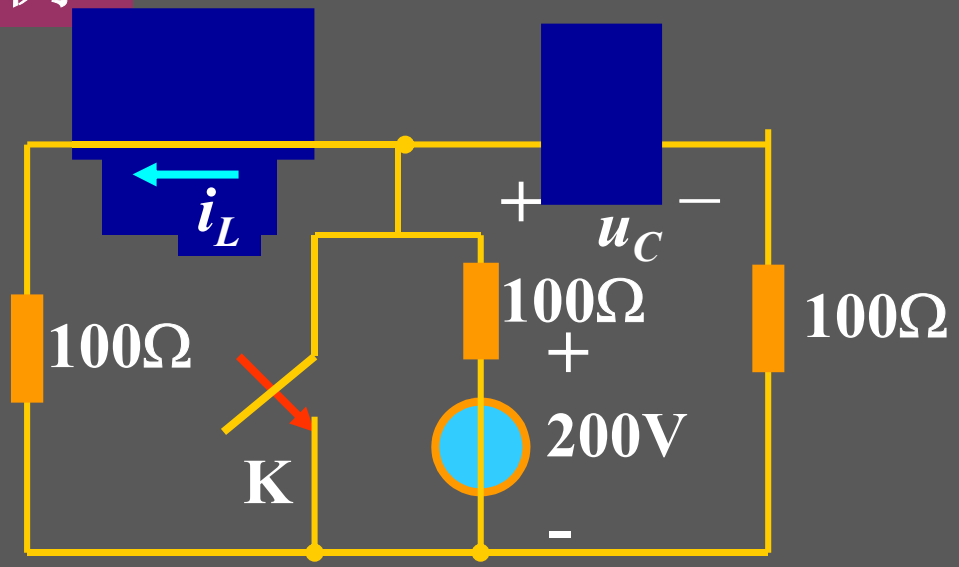
$$u_C(0^-)=u_C(0^+)=2\times12=24V$$

$$i_C(0^+)=(48-24)/3=8A$$

$$i(0^+)=12+8=20A$$

$$u_L(0^+)=48-2\times12=24V$$

例4 求K闭合瞬间流过它的电流值。

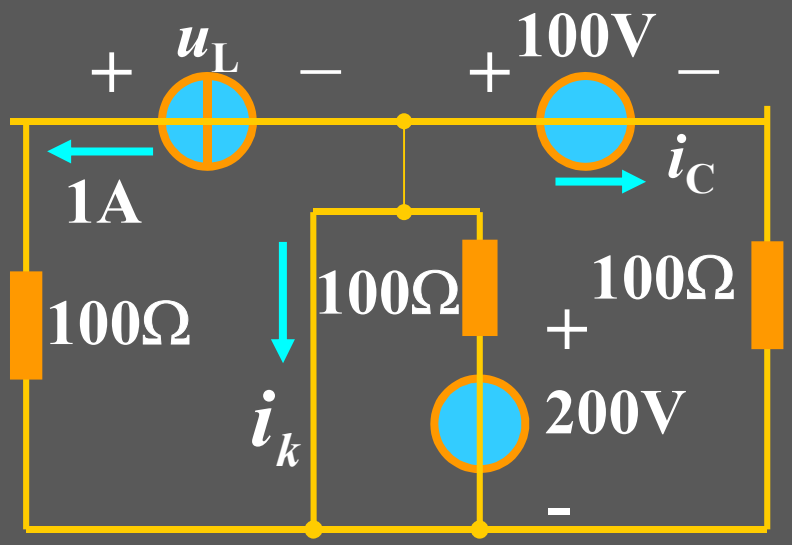


解 （1）确定0^-值

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=\frac{200}{200}=1A$$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=100V$$

（2）给出0^+等效电路



$$i_k(0^+)=\frac{200}{100}+\frac{100}{100}-1=2A$$

$$u_L(0^+)=-i_L(0^+)\times 100=100V$$

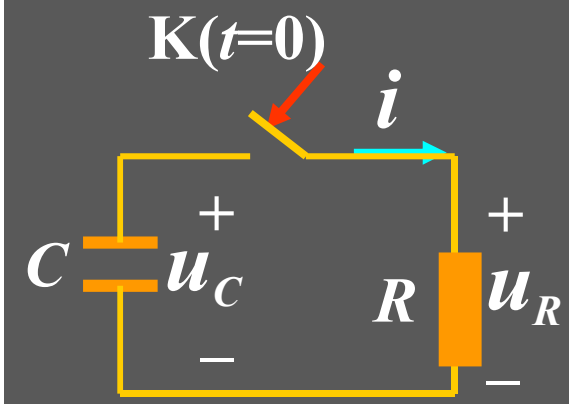
$$i_C(0^+)=-u_C(0^+)/100=-1A$$

7.2 一阶电路的零输入响应

零输入响应 ➡ 换路后外加激励为零，仅由动态元件初始储能所产生的电压和电流。

1. *RC*电路的零输入响应

已知 $u_C(0^-)=U_0$



$$-u_R+u_C=0$$

$$\begin{cases} i=-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ u_R=Ri \end{cases} \qquad \begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \\ u_C(0^+)=U_0 \end{cases}$$

特征方程 $RCp+1=0$ 特征根 $p=-\dfrac{1}{RC}$

则 $u_C=\mathrm{A}e^{pt}=\mathrm{A}e^{-\frac{1}{RC}t}$

$$u_c = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$ 代入初始值 $u_C(0^+)=u_C(0^-)=U_0$

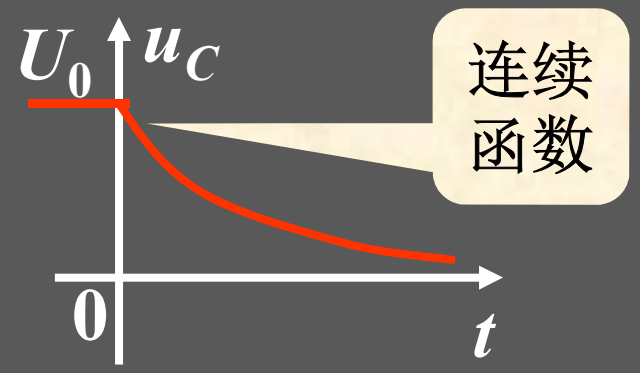
$\rightarrow$ $A=U_0$ $\rightarrow$ $$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

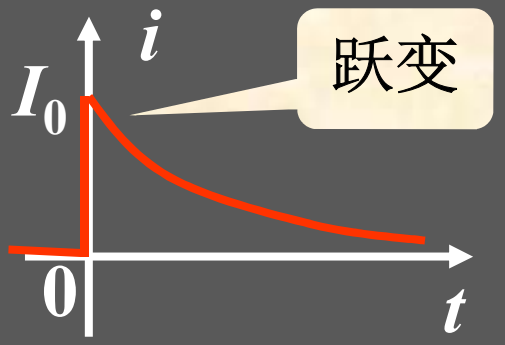
$$i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

或 $$i = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -CU_0 e^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

从以上各式可以得出：

（1）电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；





（2）响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与**RC**有关；

令 $\tau = RC$ ， 称τ为一阶电路的时间常数

$$[\tau]=[RC]=[\text{欧}][\text{法}]=[\text{欧}]\left[\frac{\text{库}}{\text{伏}}\right]=[\text{欧}]\left[\frac{\text{安秒}}{\text{伏}}\right]=[\text{秒}]$$

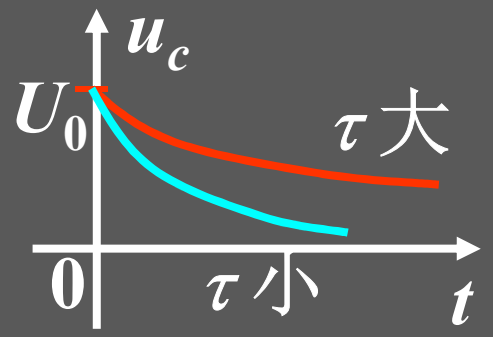
$\tau = RC$

$$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$

时间常数 τ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ 大 → 过渡过程时间长

τ 小 → 过渡过程时间短



物理含义 → 电压初值一定：

C 大（R一定） $W=Cu^2/2$ 储能大

R 大（ C一定） $i=u/R$ 放电电流小

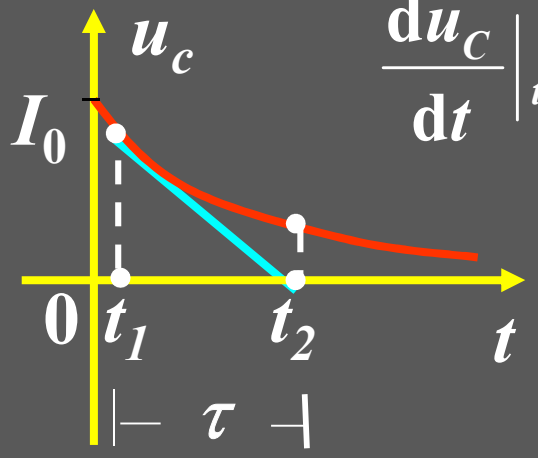
} 放电时间长

t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
	U_0	$0.368\,U_0$	$0.135\,U_0$	$0.05\,U_0$	$0.007\,U_0$

τ：电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间。

工程上认为，经过 3τ—5τ，过渡过程结束。

t_1时刻曲线的斜率等于

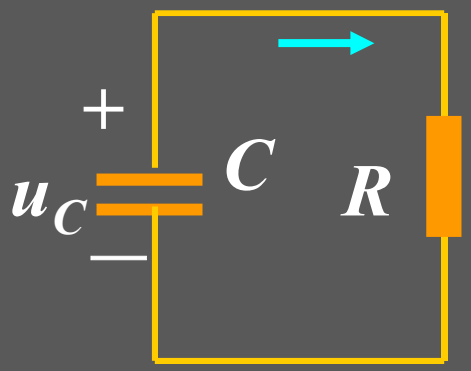


$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t_1} = \left.-\frac{U_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right|_{t_1} = -\frac{1}{\tau}u_C(t_1) = \frac{u_C(t_1)-0}{t_1-t_2}$$

$\tau = t_2 - t_1$ ⟹ 次切距的长度

$$u_C(t_2) = 0.368\,u_C(t_1)$$

（3）能量关系 → 电容不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕.



设$u_C(0^+)=U_0$

电容放出能量： → $\frac{1}{2}CU_0^2$

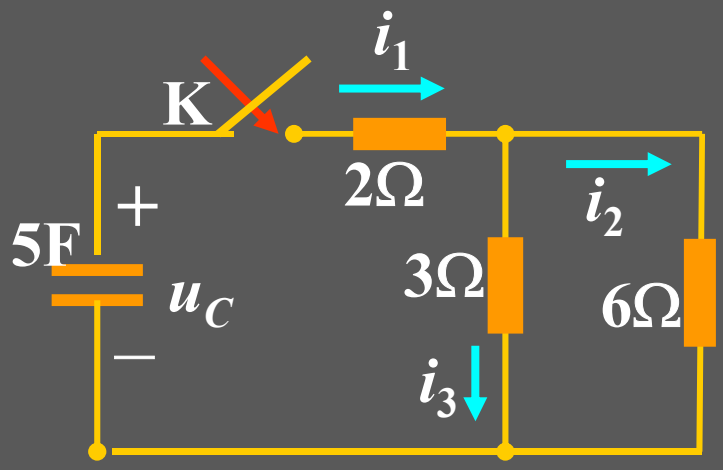
电阻吸收（消耗）能量： →

$$W_R=\int_0^\infty i^2Rdt=\int_0^\infty(\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}})^2Rdt$$

$$=\frac{U_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}dt=\frac{U_0^2}{R}(-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}})\Big|_0^\infty=\frac{1}{2}CU_0^2$$

例 已知图示电路中的电容原本充有24V电压，求K闭合后，电容电压和各支路电流随时间变化的规律。

解 这是一个求一阶RC零输入响应问题，有：



$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

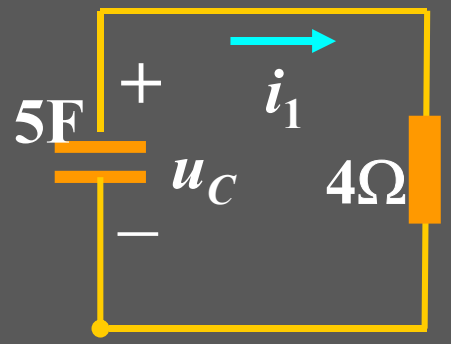
代入 $U_0 = 24V \quad \tau = RC = 5 \times 4 = 20\,s$

$$\rightarrow \quad u_c = 24e^{-\frac{t}{20}}V \qquad t \geq 0$$

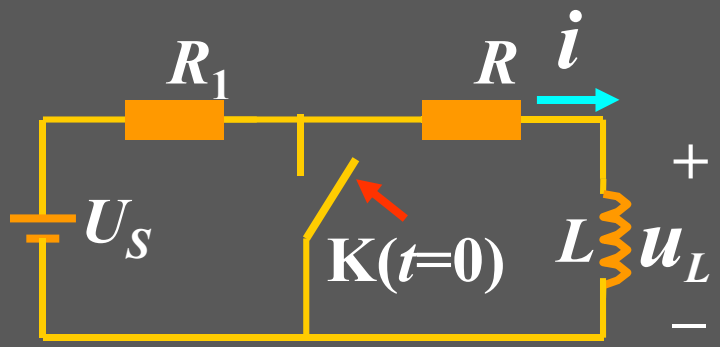
$$i_1 = u_C / 4 = 6\,e^{-\frac{t}{20}}A$$

分流得：$i_2 = \frac{2}{3} i_1 = 4e^{-\frac{t}{20}}A \quad i_3 = \frac{1}{3} i_1 = 2e^{-\frac{t}{20}}A$

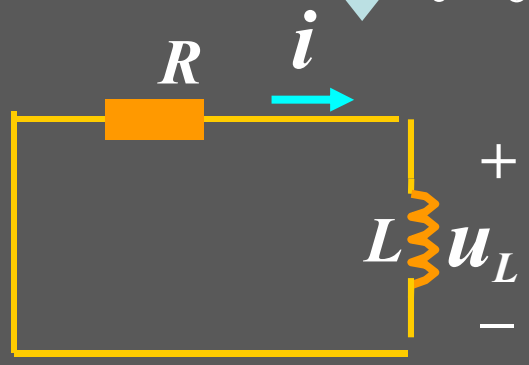
等效电路 t >0



2. *RL*电路的零输入响应



t >0



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{U_S}{R_1 + R} = I_0$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0 \quad t \geq 0$$

特征方程 $Lp+R=0$

特征根 $p = -\dfrac{R}{L}$

$$i(t) = Ae^{pt}$$

代入初始值 $i(0^+)= I_0$ ⟶ $A= i(0^+)= I_0$

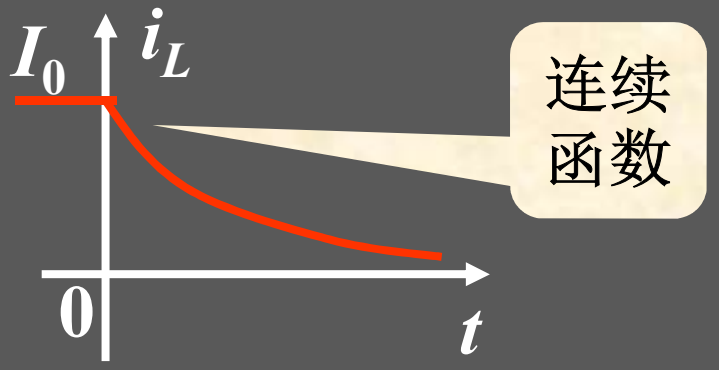
得 $i(t) = I_0 e^{pt} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0$

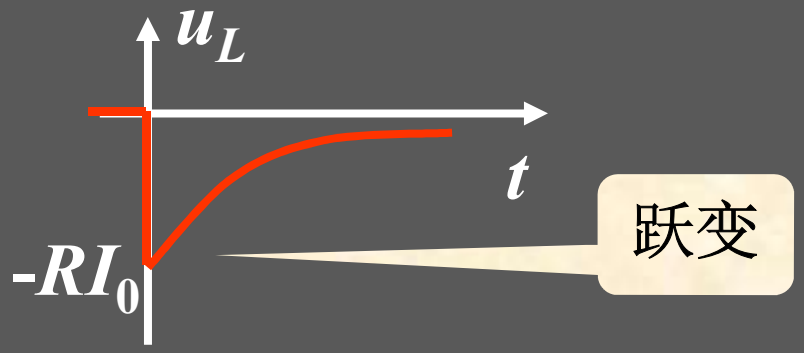
$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t \geq 0$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{L/R}}$$

从以上式子可以得出：

（1）电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；





（2）响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与**L/R**有关；

令 $\tau = L/R$ ， 称为一阶*RL*电路时间常数

$$[\tau] = [\frac{L}{R}] = [\frac{\text{亨}}{\text{欧}}] = [\frac{\text{韦}}{\text{安}\cdot\text{欧}}] = [\frac{\text{伏}\cdot\text{秒}}{\text{安}\cdot\text{欧}}] = [\text{秒}]$$

$$\tau = L/R \qquad p = \frac{-1}{L/R} = \frac{-1}{\tau}$$

时间常数 τ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短

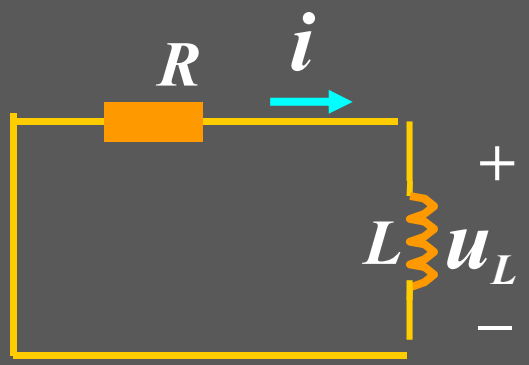
τ 大 → 过渡过程时间长　　τ 小 → 过渡过程时间短

物理含义 ⟶ 电流初值$i(0)$一定：

*L*大　$W=Li^2/2$　起始能量大
*R*小　$P=Ri^2$　放电过程消耗能量小

} 放电慢 τ大

（3）能量关系 → 电感不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕.



设$i_L(0^+)=I_0$

电感放出能量： → $\frac{1}{2}LI_0^2$

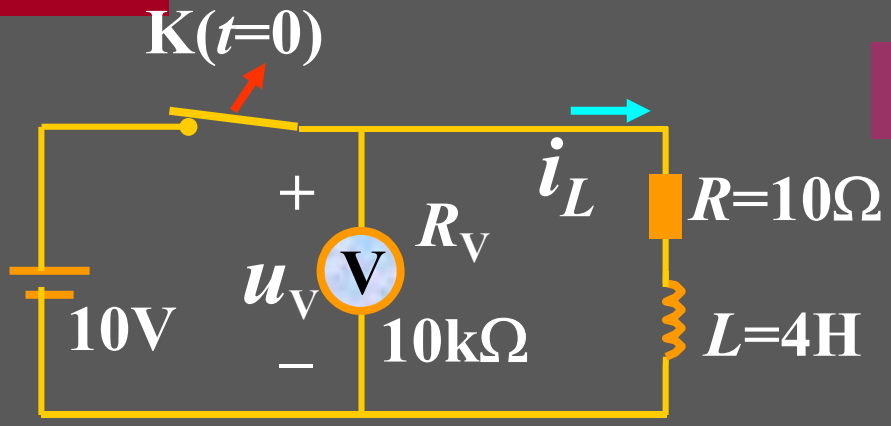
电阻吸收（消耗）能量： →

$$W_R=\int_0^\infty i^2Rdt=\int_0^\infty (I_0e^{-\frac{t}{L/R}})^2Rdt$$

$$=I_0^2R\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{L/R}}dt=I_0^2R(-\frac{L/R}{2}e^{-\frac{2t}{RC}})\Big|_0^\infty=\frac{1}{2}LI_0^2$$

例1

t=0时，打开开关K，求u_v。 电压表量程：50V



$R_V = 10k\Omega$

解

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\ \text{A}$$

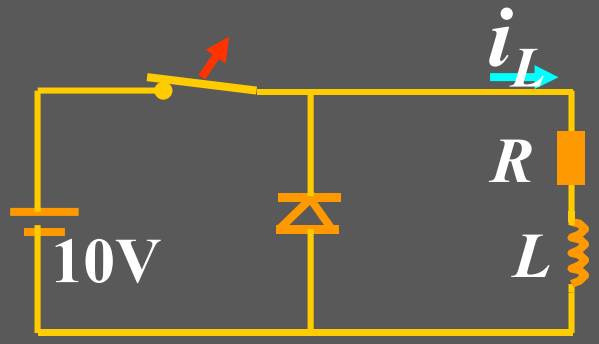
$$i_L = e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$$

$$\tau = \frac{L}{R + R_V} = \frac{4}{10000} = 4\times10^{-4}\ s$$

$$u_V = -R_V i_L = -10000e^{-2500t} \qquad t \geq 0$$

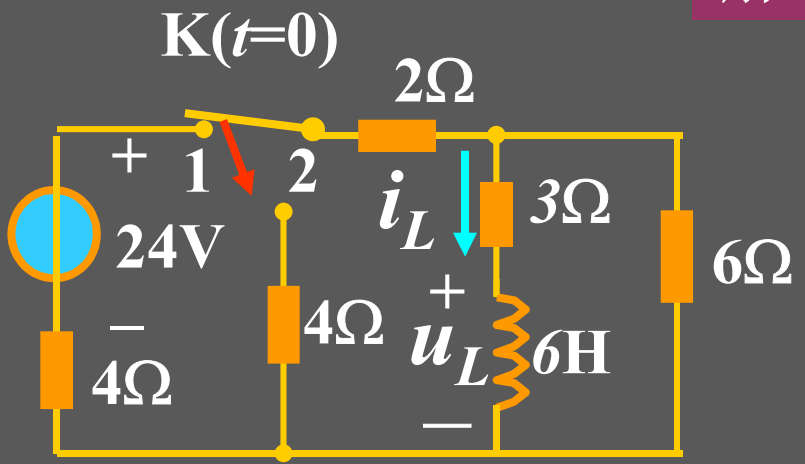
$u_V(0^+)$=－ 10000V 造成 V 损坏。

现象： 电压表坏了



例2

t=0时，开关K由1→2，求电感电压和电流及开关两端电压u_{12}。



解

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)$$

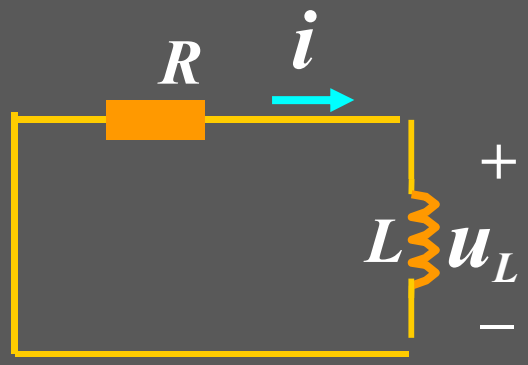
$$=\frac{24}{4+2+3//6}\times\frac{6}{3+6}=2A$$

$$R=3+(2+4)//6=6\Omega$$

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{6}{6}=1s$$

t >0 ⇓

$$i_L=2e^{-t}\text{A}\qquad u_L=L\frac{di_L}{dt}=-12e^{-t}\text{V}\qquad t\geq 0$$



$$u_{12}=24+4\times\frac{i_L}{2}=24+4e^{-t}V$$

小结

1. 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应，都是由初始值衰减为零的指数衰减函数。

$$y(t) = y(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

*RC*电路 $u_C(0^+) = u_C(0^-)$

*RL*电路 $i_L(0^+) = i_L(0^-)$

2. 衰减快慢取决于时间常数τ

*RC*电路 $\tau = RC$，*RL*电路 $\tau = L/R$

*R*为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。

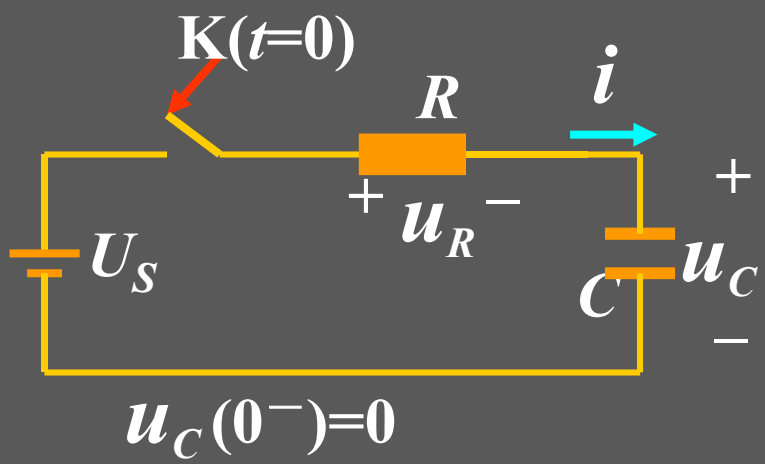
3. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

4. 一阶电路的零输入响应和初始值成正比，称为零输入线性。

7.3 一阶电路的零状态响应

零状态响应 ➡ 动态元件初始能量为零，由$t>0$电路中外加输入激励作用所产生的响应。

1. *RC*电路的零状态响应



$u_C(0^-)=0$

列方程：

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

非齐次线性常微分方程

解答形式为：

$$u_c=u_c'+u_c''$$

齐次方程通解

非齐次方程特解

u''_C → 特解（强制分量，稳态分量）

$RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$ 的特解 → $u''_C=U_S$

与输入激励的变化规律有关，为电路的稳态解

u'_C → 通解（自由分量，暂态分量）

$RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$ 的通解 → $u'_C=Ae^{-\frac{t}{RC}}$

变化规律由电路参数和结构决定

全解 $u_C(t)=u'_C+u''_C=U_S+Ae^{-\frac{t}{RC}}$

由初始条件 $u_C(0^+)=0$ 定积分常数 A

$u_C(0^+)=A+U_S=0$ → $A=-U_S$

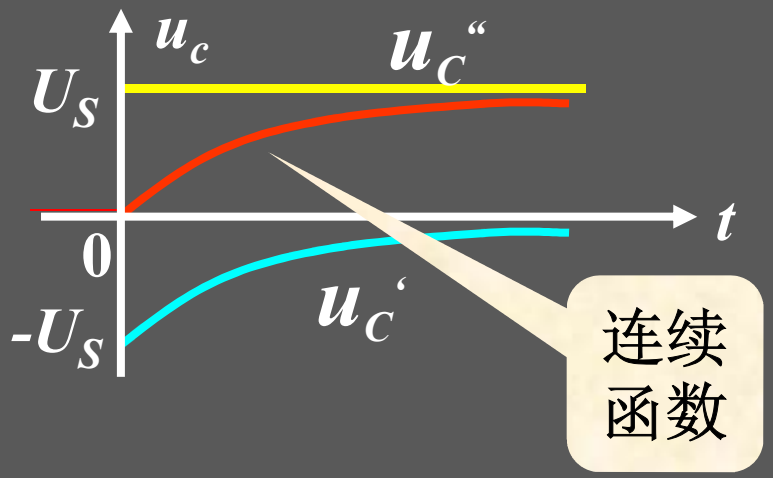
$$u_c = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0)$$

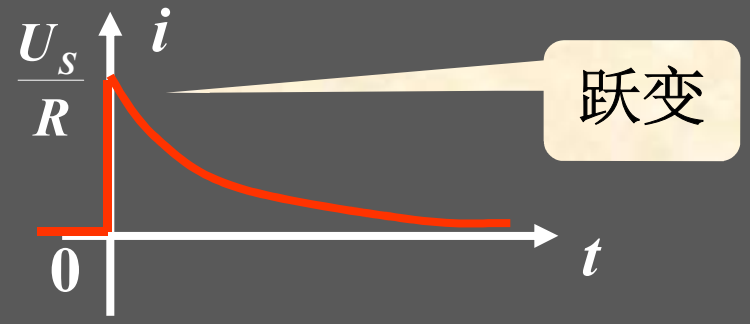
从以上式子可以得出：

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

（1）电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数；
电容电压由两部分构成：

稳态分量（强制分量） + 暂态分量（自由分量）

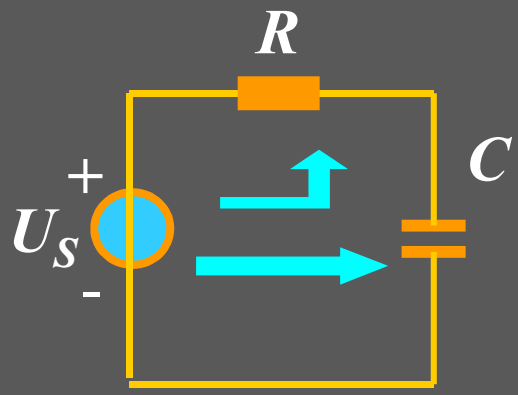




（2）响应变化的快慢，由时间常数τ＝RC决定；τ大，充电慢，τ小充电就快。

（3）响应与外加激励成线性关系；

（4）能量关系



电容储存：$\frac{1}{2}CU_S^2$

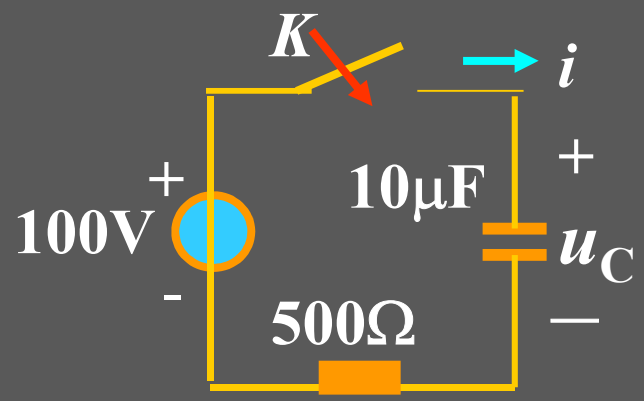
电源提供能量：$\int_0^\infty U_S i\,\mathrm{d}t = U_S q = CU_S^2$

电阻消耗 $\int_0^\infty i^2 R\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}})^2 R\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_S^2$

电源提供的能量一半消耗在电阻上，
一半转换成电场能量储存在电容中。

例 $t=0$时，开关K闭合，已知 $u_C(0^-)=0$，求（1）电容电压和电流，（2）$u_C=80$V时的充电时间t。

解 (1) 这是一个RC电路零状态响应问题，有：



$$\tau = RC = 500\times10^{-5} = 5\times10^{-3}\,s$$

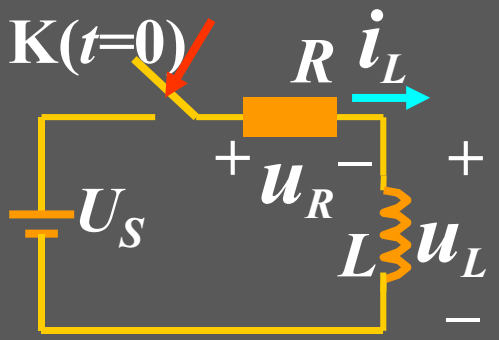
$$u_c = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1-e^{-200t})\text{V} \quad (t\geq 0)$$

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = 0.2e^{-200t}\,A$$

（2）设经过t_1秒，$u_C=80$V

$$80 = 100(1-e^{-200t_1}) \rightarrow t_1 = 8.045\text{ms}$$

2. *RL*电路的零状态响应



已知$i_L(0^-)=0$，电路方程为：

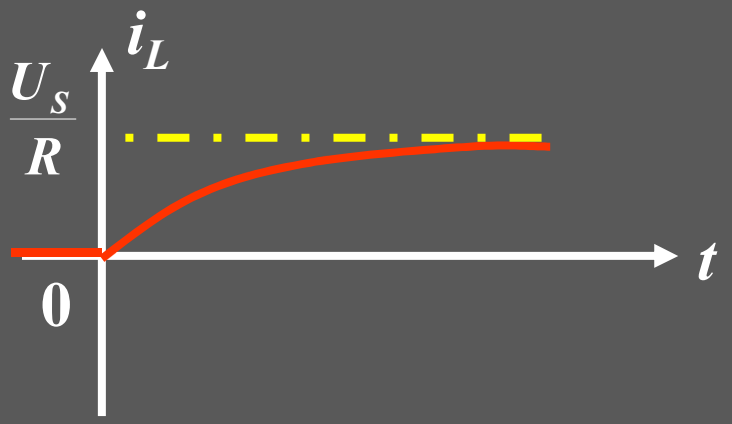
$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=U_S$$

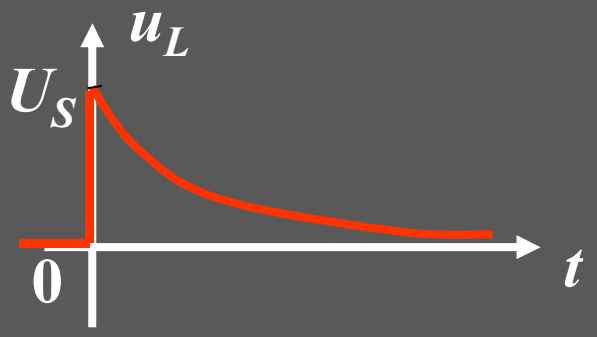
$$i_L=i_L'+i_L''=\frac{U_S}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(0^+)=0\rightarrow A=-\frac{U_S}{R}$$

$$i_L=\frac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

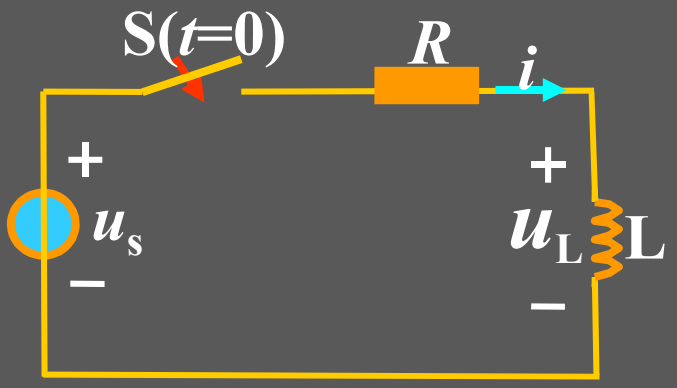
$$u_L=L\frac{di_L}{dt}=U_Se^{-\frac{R}{L}t}$$





3．RL电路在正弦电压激励下的零状态响应

外加激励：$u_S = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$



其中 ϕ_u 为接通电路时外施电压的初相角

初始条件：$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$

接通后电路方程 $L\dfrac{di}{dt} + Ri = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$

通解为 $i = i' + i''$

自由分量：$i'' = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$，$\tau = \dfrac{L}{R}$ （特征方程 $Lp+R=0$ ）

i' 为方程 $L\dfrac{di'}{dt} + Ri' = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$ 的特解

设特解为：$i' = I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \theta)$

把它代入上列微分方程，有

$$RI_m\cos(\omega t+\theta) - \omega L I_m \sin(\omega t+\theta) = U_m\cos(\omega t+\phi_u)$$

I_m，θ 可由的待定系数法求出

引入 $\tan\varphi = \dfrac{\omega L}{R}$，有

$$\sin\varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

再令 $|Z| = \sqrt{R^2+(\omega L)^2}$，上式左方可写为

$$I_m\left[R\cos(\omega t+\theta)-\omega L\sin(\omega t+\theta)\right]$$

$$=I_m|Z|\left[\cos(\omega t+\theta)\frac{R}{|Z|}-\sin(\omega t+\theta)\frac{\omega L}{|Z|}\right]$$

$$=I_m|Z|\left[\cos(\omega t+\theta)\cos\varphi-\sin(\omega t+\theta)\sin\varphi\right]$$

$$=I_m|Z|\cos(\omega t+\theta+\varphi)$$

于是，得 $I_m|Z|\cos(\omega t+\theta+\varphi)=U_m\cos(\omega t+\phi_u)$

因此可求得待定常数 $I_m|Z|=U_m$ $\theta+\varphi=\phi_u$

特解 $i'=\dfrac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t+\phi_u-\varphi)$

方程的通解为 $i=\dfrac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t+\phi_u-\varphi)+\mathrm{A}e^{-\frac{t}{\tau}}$

由 $i(0_+)=i(0_-)=0 \quad \Rightarrow \quad A=-\dfrac{U_m}{|Z|}\cos(\phi_u-\varphi)$

电流

$$i=\frac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t+\phi_u-\varphi)-\frac{U_m}{|Z|}\cos(\phi_u-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电阻上的电压为

$$u_R=Ri=\frac{RU_m}{|Z|}\cos(\omega t+\phi_u-\varphi)-\frac{RU_m}{|Z|}\cos(\phi_u-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电感上的电压为

$$u_L=L\frac{di}{dt}=U_m\frac{\omega L}{|Z|}\cos(\omega t+\phi_u-\varphi+\frac{\pi}{2})+U_m\frac{R}{|Z|}\cos(\phi_u-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

结论

①方程的特解或强制分量 *i'* 与外施激励按相同的正弦规律变化；

②自由分量 *i"* 随时间增长而趋于零,自由分量指数函数 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 前的系数 $\frac{U_m}{|Z|}\cos(\phi_u-\varphi)$ 与 φ 有关，即与开关闭合的时刻有关。

③ 若开关闭合时, $\phi_u=\varphi-\frac{\pi}{2}$ ，则

$$A=-\frac{U_m}{|Z|}\cos(\phi_u-\varphi)=0 \quad , \quad i''=0$$

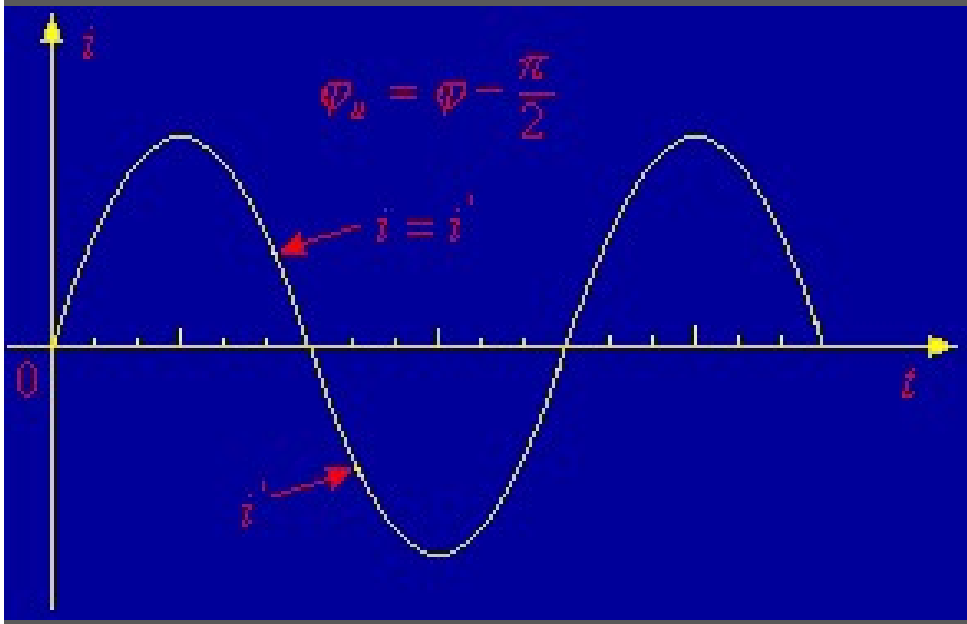
$$i=i'=\frac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

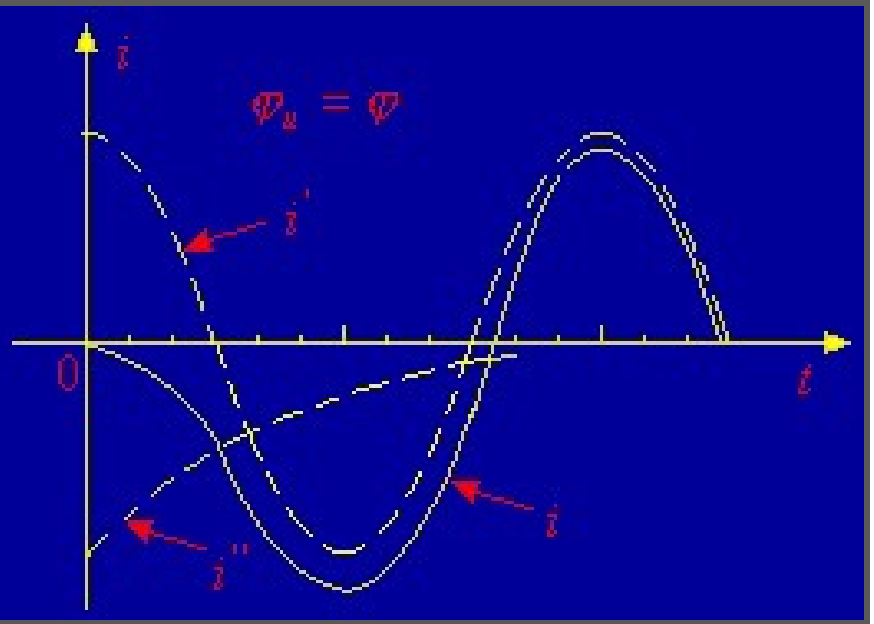
故开关闭合后，无自由分量，仅有强制分量，电路中不发生过渡过程而立即进入稳定状态。

④ 若开关闭合时，$\phi_u = \varphi$ ，则

$$A = -\frac{U_m}{|Z|}\cos(\phi_u - \varphi) = -\frac{U_m}{|Z|} \qquad i'' = -\frac{U_m}{|Z|}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = \frac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t) - \frac{U_m}{|Z|}e^{-\frac{t}{\tau}}$$





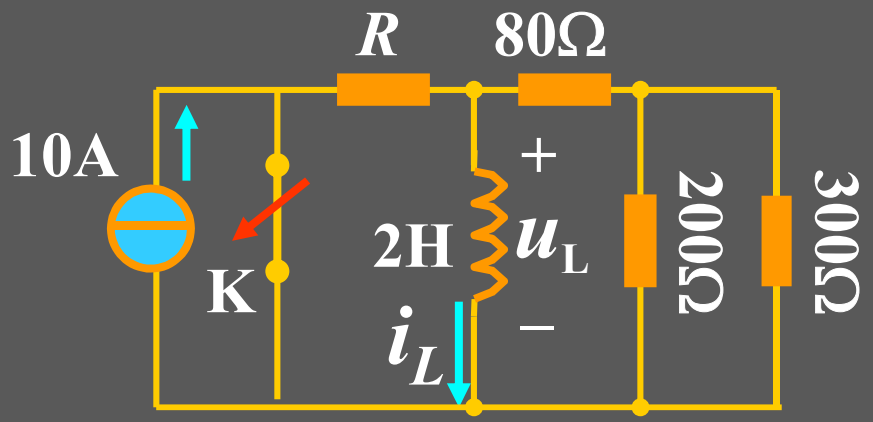
⑤ τ 很大（$R \to 0$，$\tau \to \infty$，$\phi = \frac{\pi}{2}$），*i*”衰减极其缓慢，$t \approx \frac{T}{2}$

$$i = I_m = 2\frac{U_m}{|Z|}$$

⑥ ***RL***电路与正弦电流接通后，在初始值一定的条件下，电路的过渡过程与开关动作的时刻有关。

例1 t=0时 ，开关K打开，求t>0后i_L、u_L的变化规律 。

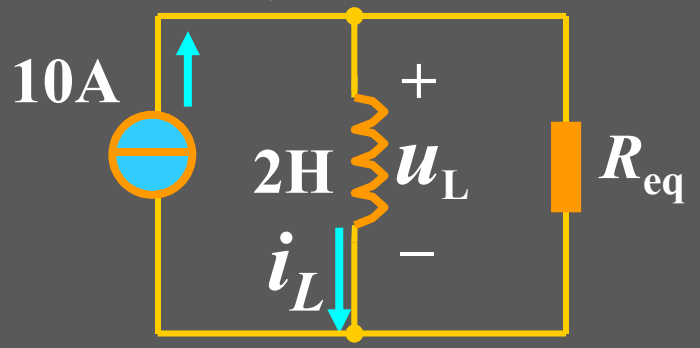
解 这是一个RL电路零状态响应问题，先化简电路，有：



$$R_{eq} = 80 + 200 // 300 = 200\Omega$$

$$\tau = L / R_{eq} = 2 / 200 = 0.01s$$

t≥0



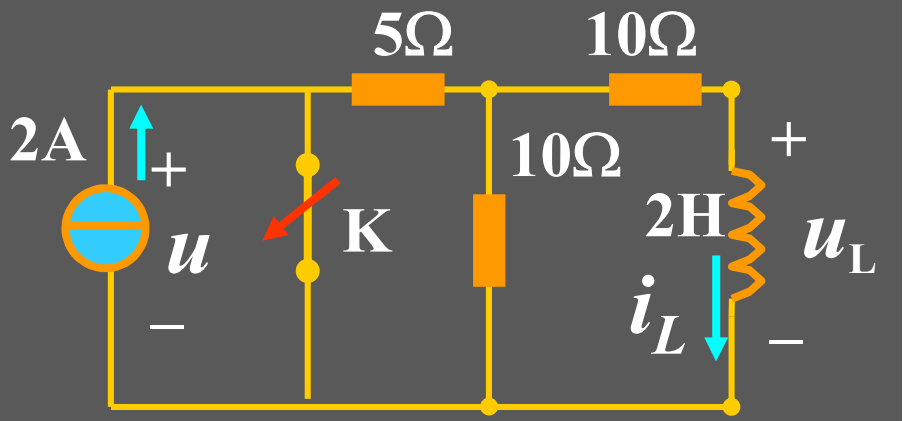
$$i_L(\infty) = 10A$$

$$i_L(t) = 10(1 - e^{-100t})A$$

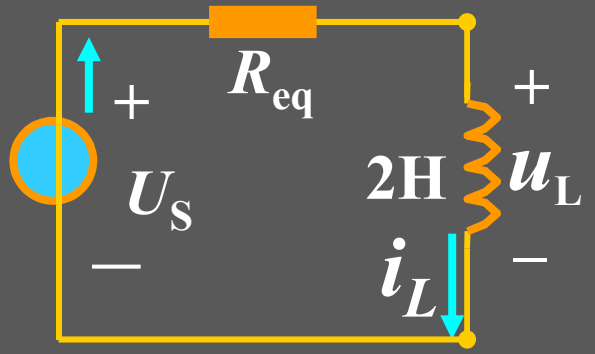
$$u_L(t) = 10 \times R_{eq} e^{-100t} = 2000e^{-100t}V$$

例2 t=0时 ，开关K打开，求t>0后i_L、u_L的及电流源的端电压。

解 这是一个RL电路零状态响应问题，先化简电路，有：



t≥0



$$R_{eq} = 10 + 10 = 20\Omega$$

$$U_S = 2 \times 10 = 20V$$

$$\tau = L / R_{eq} = 2 / 20 = 0.1s$$

$$i_L(\infty) = U_S / R_{eq} = 1A$$

$$i_L(t) = (1 - e^{-10t})A$$

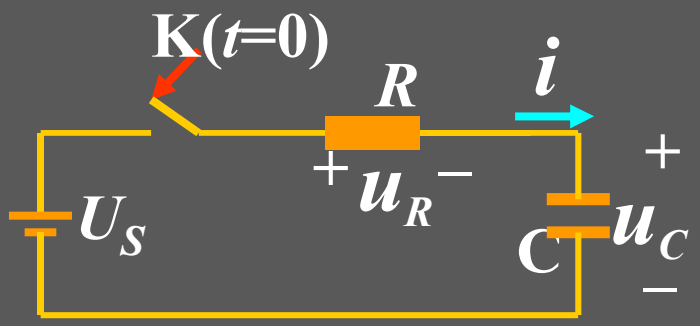
$$u_L(t) = U_S e^{-10t} = 20e^{-10t}V$$

$$u = 5I_S + 10i_L + u_L = 20 + 10e^{-10t}V$$

7.4 一阶电路的全响应

全响应 ➡ 电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

1. 全响应



以RC电路为例，电路微分方程：

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

解答为 $u_C(t)=u_C'+u_C''$

$$\begin{cases}\text{稳态解}\ u_C'=U_S\\ \text{暂态解}\ u_C''=Ae^{-\frac{t}{\tau}}\end{cases}$$

$\tau=RC$

由起始值定A

$u_C(0^-)=U_0$

$u_C(0^+)=A+U_S=U_0$

$\therefore A=U_0-U_S$

$$u_C = U_S + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

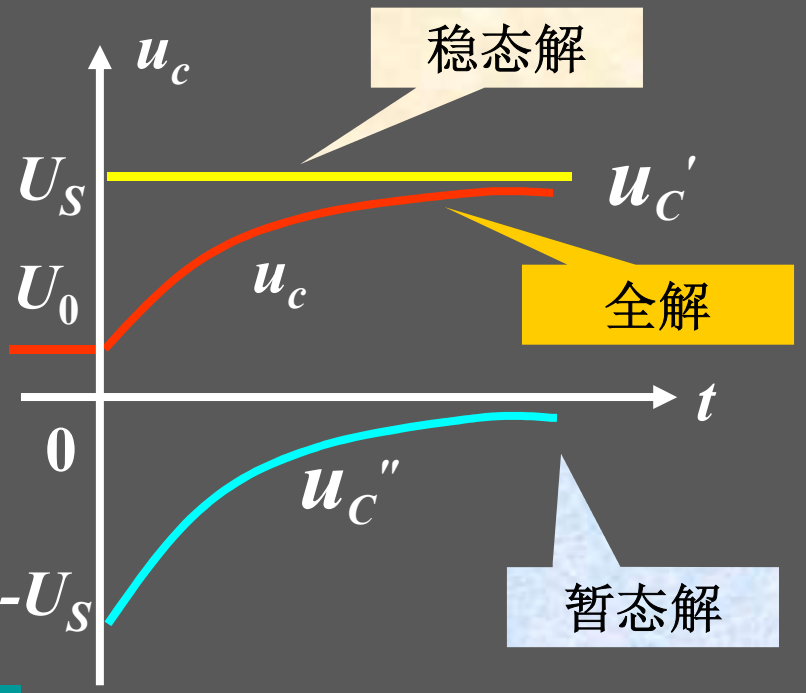
强制分量(稳态解)

自由分量(暂态解)

2. 全响应的两种分解方式

（1） 着眼于电路的两种工作状态

全响应 = 强制分量(稳态解) + 自由分量(暂态解)



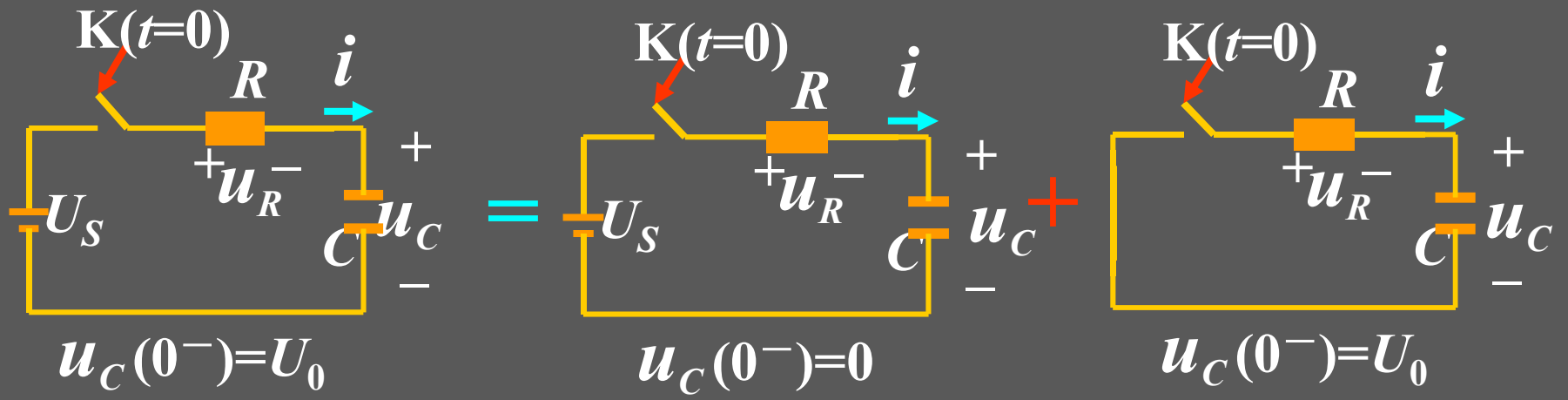
物理概念清晰

(2). 着眼于因果关系　　便于叠加计算

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

零状态响应　　零输入响应

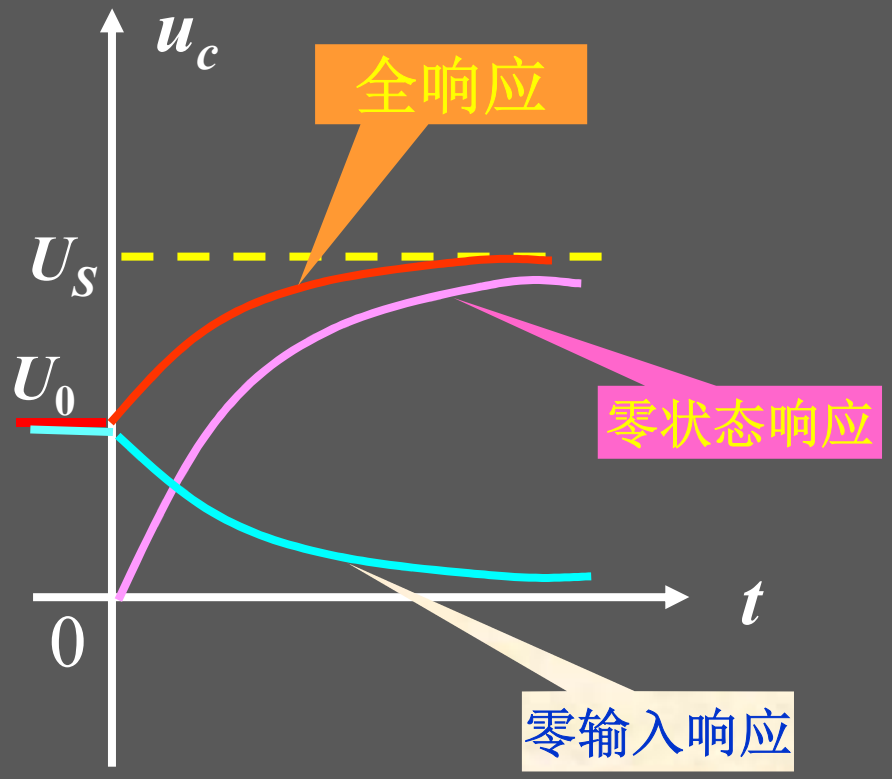
全响应＝零状态响应＋零输入响应



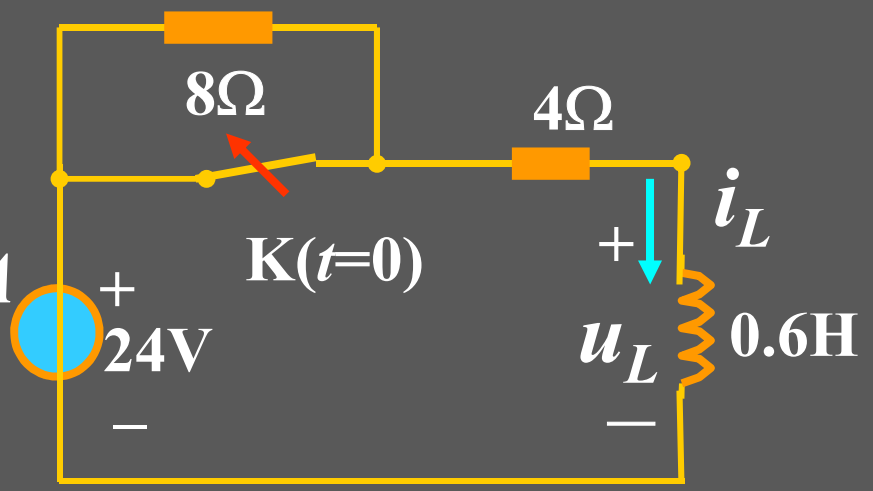
$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

零状态响应

零输入响应



例1 t=0时 ，开关K打开，求t>0后的i_L、u_L



解 这是一个RL电路全响应问题，有：

$$i_L(0^-)=i_L(0^+)=U_S/R_1=6A$$

$$\tau=L/R=0.6/12=1/20s$$

零输入响应：$i'_L(t)=6e^{-20t}A$

零状态响应：$i''_L(t)=\frac{24}{12}(1-e^{-20t})A$

全响应：$i_L(t)=6e^{-20t}+2(1-e^{-20t})=2+4e^{-20t}A$

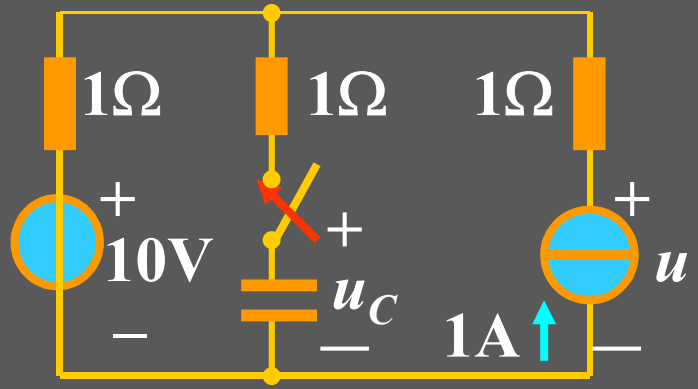
或求出稳态分量：　$i_L(\infty)=24/12=2A$

全响应：　$i_L(t)=2+Ae^{-20t}A$

代入初值有：　$6=2+A$ ⟶ $A=4$

例2　t=0时，开关K闭合，求t>0后的i_C、u_C及电流源两端的电压。$(u_C(0^-)=1V, C=1F)$

解　这是一个RC电路全响应问题，有：



稳态分量：$u_C(\infty)=10+1=11V$

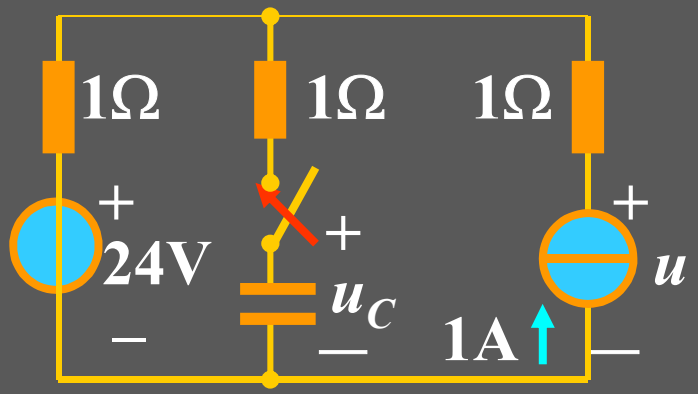
$\tau=RC=(1+1)\times1=2s$

全响应：$u_C(t)=11+Ae^{-0.5t}V$ ⟶ $A=-10$

$$u_C(t) = 11 - 10e^{-0.5t}V$$

$$i_C(t) = \frac{du_C}{dt} = 5e^{-0.5t}A$$

$$u(t) = 1\times 1 + 1\times i_C + u_C = 12 - 5e^{-0.5t}V$$



3. 三要素法分析一阶电路

一阶电路的数学模型是一阶微分方程：$a\frac{df}{dt}+bf=c$

其解答一般形式为：$f(t)=f(\infty)+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

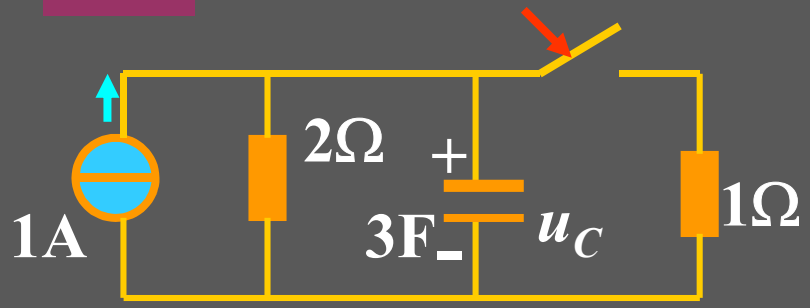
令 $t=0^+$ $f(0^+)=f(\infty)\big|_{0^+}+A$ → 直流激励时：$f(\infty)\big|_{0^+}=f(\infty)$

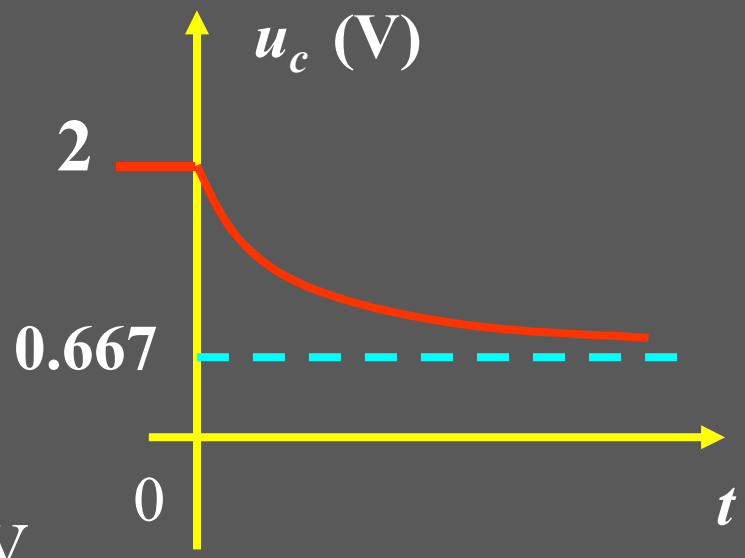
$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)\big|_{0^+}]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

三要素
- $f(\infty)$ 稳态解 → 用t→∞的稳态电路求解
- $f(0^+)$ 初始值 → $u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$用0^-等效电路求解，其它用0^+等效电路求解
- τ 时间常数 → 换路后的等效电路求解

分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素的问题

例1 已知：t=0时合开关，求换路后的$u_C(t)$ 。





解

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 2\text{V}$$

$$u_C(\infty) = (2 /\!/ 1) \times 1 = 0.667\text{V}$$

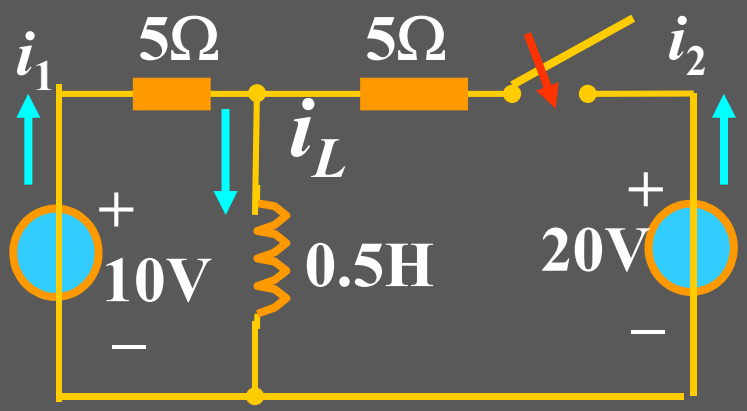
$$\tau = R_{eq}C = \frac{2}{3} \times 3 = 2\,\text{s}$$

$$u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0^+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C = 0.667 + (2 - 0.667)e^{-0.5t} = 0.667 + 1.33e^{-0.5t} \quad t \geq 0$$

例2 t=0时 ，开关闭合，求t>0后的i_L、i_1、i_2

解 三要素为：



$$i_L(0^-)=i_L(0^+)=10/5=2A$$

$$i_L(\infty)=10/5+20/5=6A$$

$$\tau=L/R=0.6/(5//5)=1/5s$$

应用三要素公式 $i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0^+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i_L(t)=6+(2-6)e^{-5t}=6-4e^{-5t}\quad t\geq 0$$

$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=0.5\times(-4e^{-5t})\times(-5)=10e^{-5t}V$$

$$i_1(t)=(10-u_L)/5=2-2e^{-5t}A$$

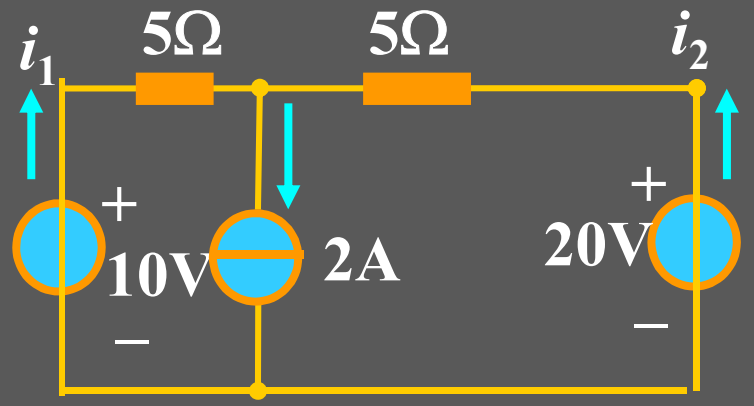
$$i_2(t)=(20-u_L)/5=4-2e^{-5t}A$$

三要素为：

$$i_L(0^-)=i_L(0^+)=10/5=2A$$

$$i_L(\infty)=10/5+20/5=6A$$

$$\tau=L/R=0.6/(5//5)=1/5s$$



0^+等效电路

$$i_1(0^+)=\frac{(10-20)}{10}+1=0A \qquad i_1(\infty)=10/5=2A$$

$$i_2(0^+)=\frac{(20-10)}{10}+1=2A \qquad i_2(\infty)=20/5=4A$$

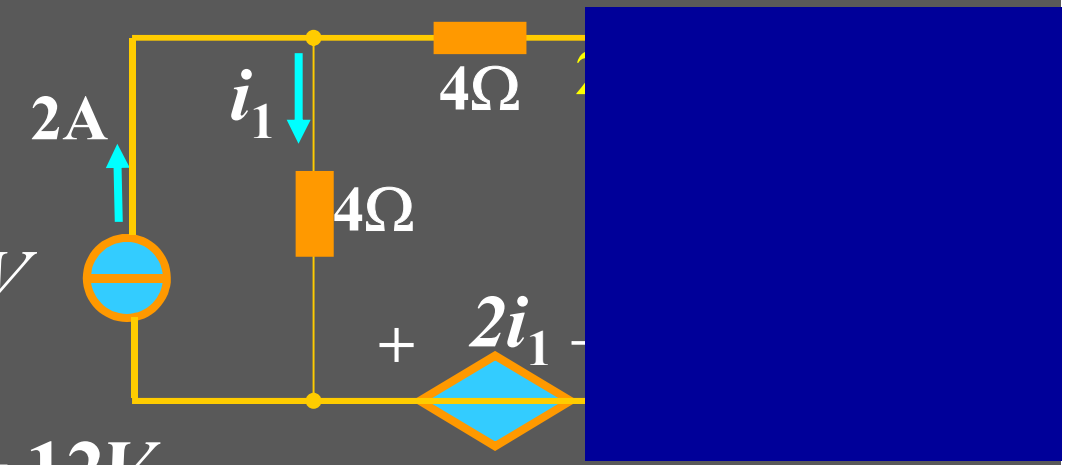
$$i_L(t)=6+(2-6)e^{-5t}=6-4e^{-5t} \quad t\geq 0$$

$$i_1(t)=2+(0-2)e^{-5t}=2-2e^{-5t}A$$

$$i_2(t)=4+(2-4)e^{-5t}=4-2e^{-5t}A$$

例3 已知：t=0时开关由1→2，求换路后的$u_C(t)$ 。

解 三要素为：



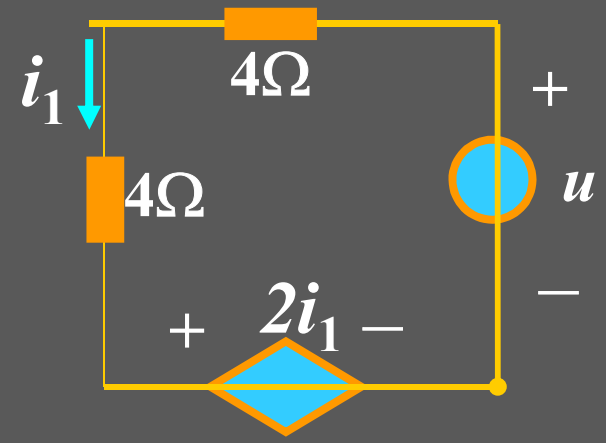
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = -8V$$

$$u_C(\infty) = 4i_1 + 2i_1 = 6i_1 = 12V$$

$$\tau = R_{eq}C = 10 \times 0.1 = 1s$$

$$u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0^+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

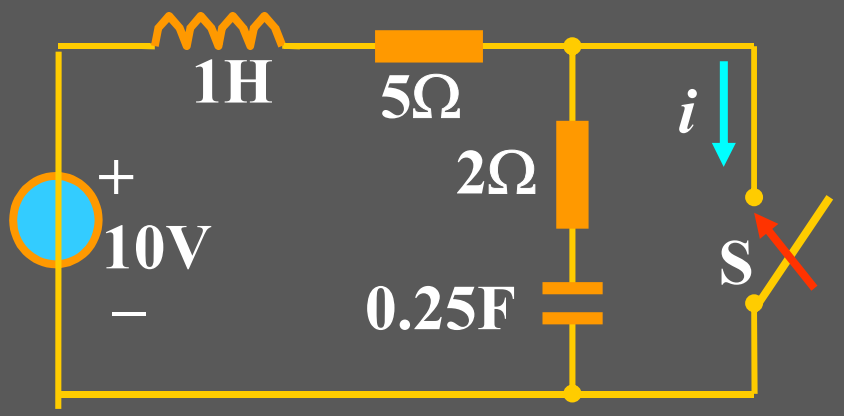
$$\rightarrow \quad u_c(t) = 12 + [-8 - 12]e^{-t}$$
$$= 12 - 20e^{-t}V$$



$$u = 10i_1 \rightarrow$$
$$R_{eq} = u / i_1 = 10\Omega$$

例4 已知：t=0时开关闭合，求换路后的电流$i(t)$ 。

解 三要素为：



$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=10V$$

$$\tau_1=R_{eq}C=2\times0.25=0.5s$$

$$u_C(\infty)=0$$

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=0 \qquad i_L(\infty)=10/5=2A$$

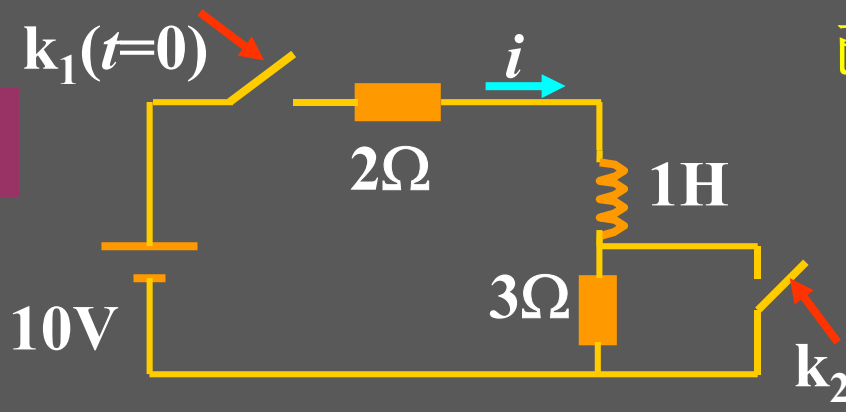
$$\tau_2=L/R_{eq}=1/5=0.2s$$

$$u_c(t)=u_c(\infty)+[u_c(0^+)-u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=10e^{-2t}V$$

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0^+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=2(1-e^{-5t})A$$

$$i(t)=i_L(t)+\frac{u_C(t)}{2}=2(1-e^{-5t})+5e^{-2t}A$$

例5



已知：电感无初始储能

$t=0$ 时合k_1，$t=0.2$s时合k_2

求两次换路后的电感电流$i(t)$。

解

$0 < t < 0.2$s

$$i(0^+)=i(0^-)=0$$

$$\tau_1 = L/R = 1/5 = 0.2\ \text{s}$$

$$i(\infty)=10/5=2\text{A}$$

$$i(t)=2-2e^{-5t}\ \text{A}$$

$t > 0.2$s

$$i(0.2^-)=2-2e^{-5\times0.2}=1.26$$

$$i(0.2^+)=1.26A$$

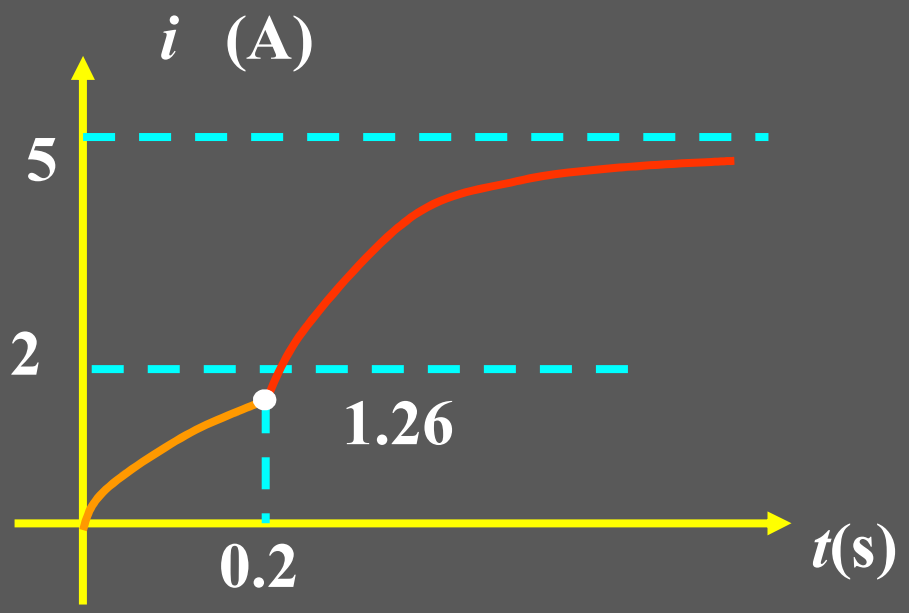
$$\tau_2 = L/R = 1/2 = 0.5$$

$$i(\infty)=10/2=5A$$

$$i(t)=5-3.74e^{-2(t-0.2)}\ \text{A}$$

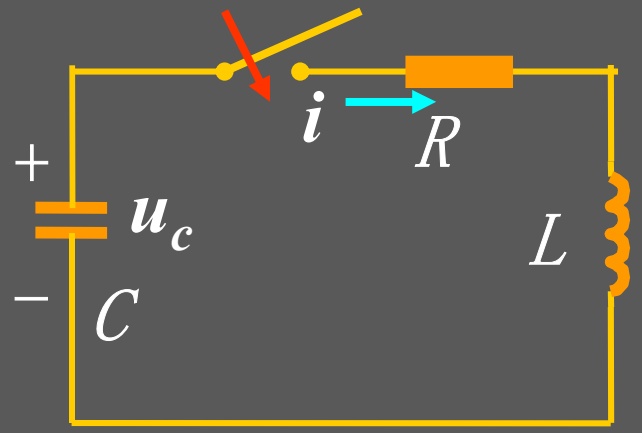
$$i = 2 - 2e^{-5t} \qquad (0 < t \le 0.2\text{s})$$

$$i = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)} \qquad (t \ge 0.2\text{s})$$



7.5 二阶电路的零输入响应

1. 二阶电路的零输入响应



已知：$u_c(0^+)=U_0$　　$i(0^+)=0$

列电路方程：$Ri+u_L-u_C=0$

$$i=-C\frac{du_C}{dt}\qquad u_L=L\frac{di}{dt}$$

若以电容电压为变量：$$LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

若以电感电流为变量：$$LC\frac{d^2i}{dt}+RC\frac{di}{dt}+i=0$$

以电容电压为变量时的初始条件：

$$u_c(0^+)=U_0 \qquad i(0^+)=0 \rightarrow \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0^+} = 0$$

以电感电流为变量时的初始条件：

$$i(0^+)=0 \qquad u_c(0^+)=U_0 \rightarrow$$

$$u_C(0^+) = u_L(0^+) = L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+} = U_0 \rightarrow \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{U_0}{L}$$

电路方程：$$LC\frac{d^2u_C}{dt} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

特征方程：$$LCP^2 + RCP + 1 = 0$$

特征根：$P=\dfrac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}=-\dfrac{R}{2L}\pm\sqrt{(\dfrac{R}{2L})^2-\dfrac{1}{LC}}$

2. 零状态响应的三种情况

$R>2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 二个不等负实根 过阻尼

$R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 二个相等负实根 临界阻尼

$R<2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 二个共轭复根 欠阻尼

(1) $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$u_c(0^+) = U_0 \rightarrow A_1 + A_2 = U_0$$

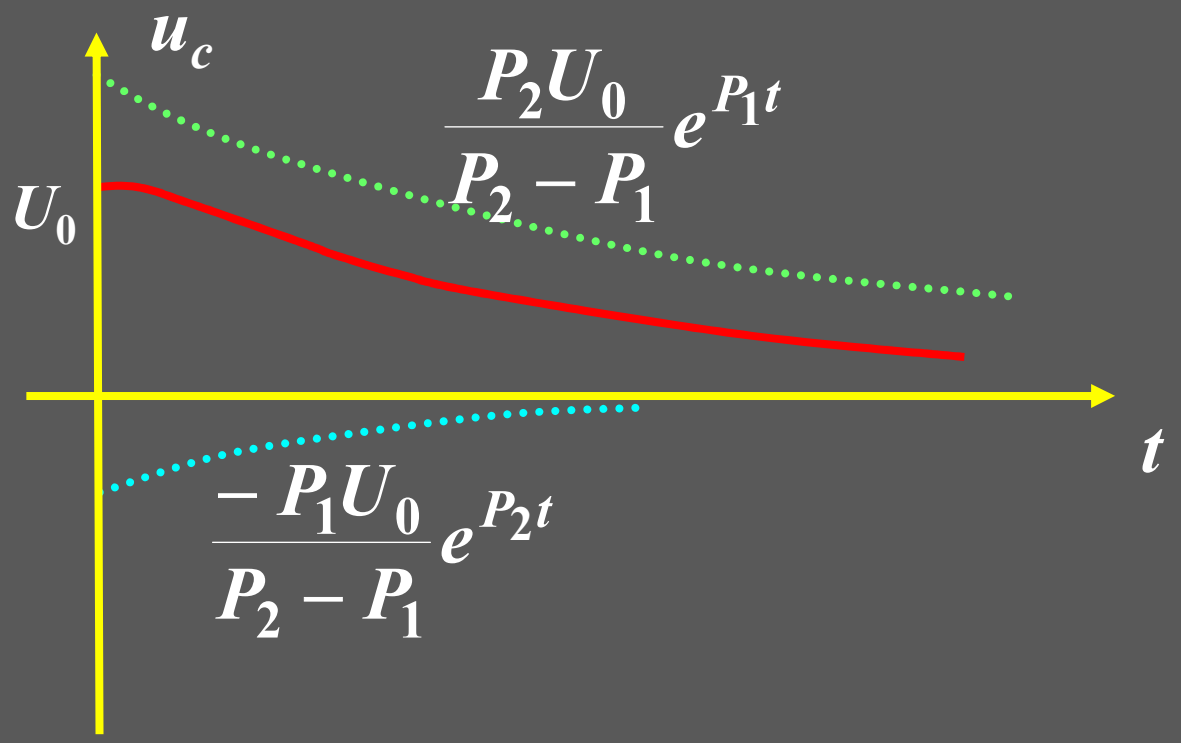
$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{(0^+)} \rightarrow P_1 A_1 + P_2 A_2 = 0$$

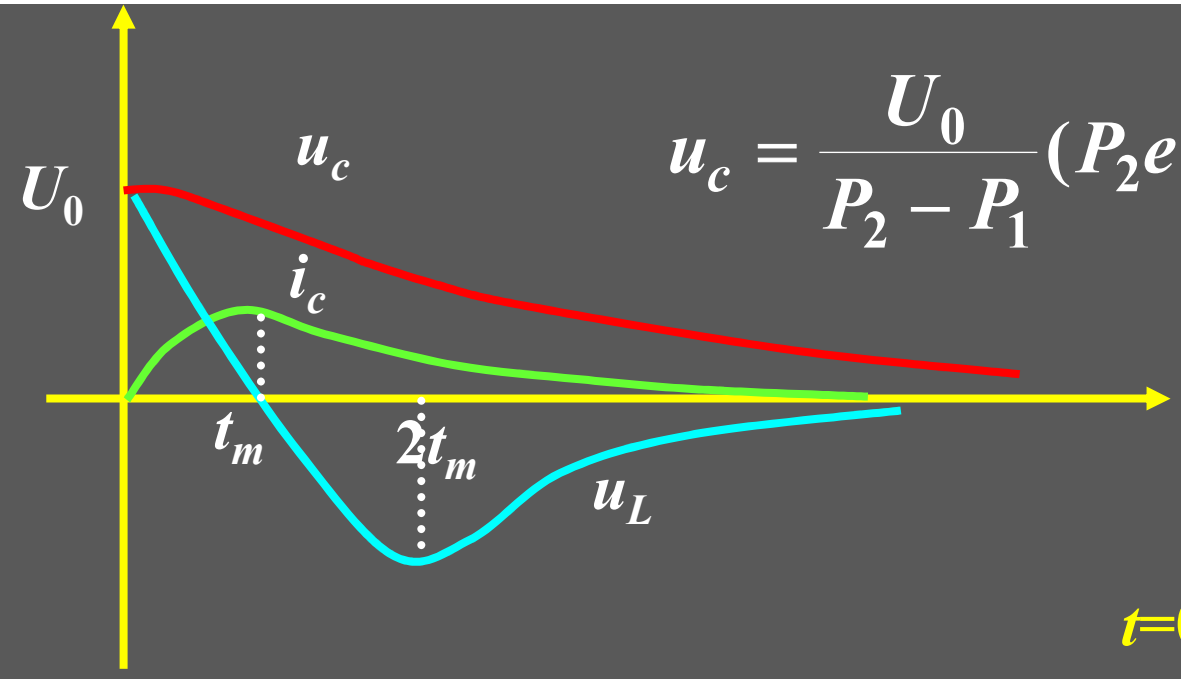
$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{P_2}{P_2 - P_1} U_0 \\ A_2 = \dfrac{-P_1}{P_2 - P_1} U_0 \end{cases}$$

$$u_C = \frac{U_0}{P_2 - P_1}(P_2 e^{P_1 t} - P_1 e^{P_2 t})$$

$$u_c = \frac{U_0}{P_2 - P_1}(P_2 e^{P_1 t} - P_1 e^{P_2 t})$$

设$|P_2|>|P_1|$





$$u_c = \frac{U_0}{P_2 - P_1}(P_2 e^{P1t} - P_1 e^{P2t})$$

t=0$^+$ i_c=0 , t=∞ i_c=0

$$i_c = -C\frac{du_c}{dt} = \frac{-U_0}{L(P_2 - P_1)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

i_c>0 $t = t_m$ 时 i_c 最大

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{-U_0}{(P_2 - P_1)}(P_1 e^{p_1 t} - P_2 e^{p_2 t})$$

0< t < t_m i增加, u_L>0

$t > t_m$ i 减小, u_L<0

t=2 t_m时 u_L 最大

$t = 0,\ u_L = U_0$ $t = \infty, u_L = 0$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{-U_0}{(P_2 - P_1)}(P_1 e^{p_1 t} - P_2 e^{p_2 t})$$

i_C=i为极值时的t_m即u_L=0时的 t,计算如下:

$$(P_1\ e^{p_1 t} - P_2\ e^{p_2 t}) = 0 \qquad \frac{P_2}{P_1} = \frac{e^{P_1 t_m}}{e^{P_2 t_m}}$$

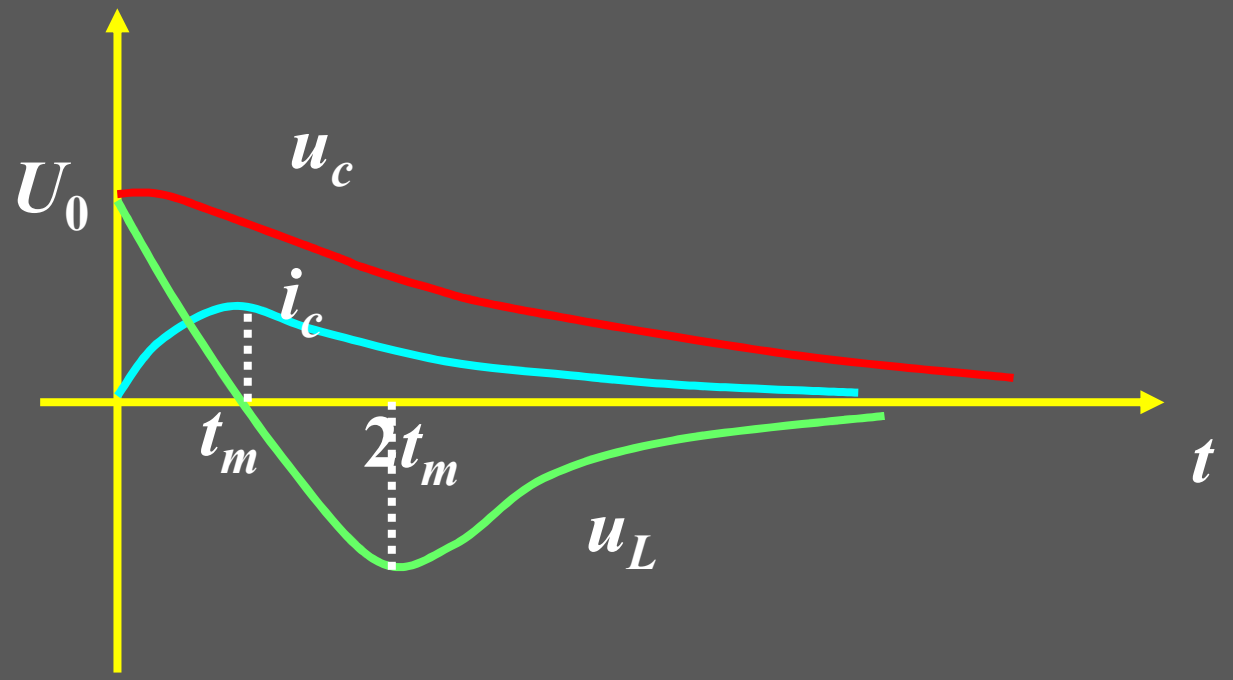
$$t_m = \frac{\ell n \dfrac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}$$

由du_L/dt可确定u_L为极小时的 t .

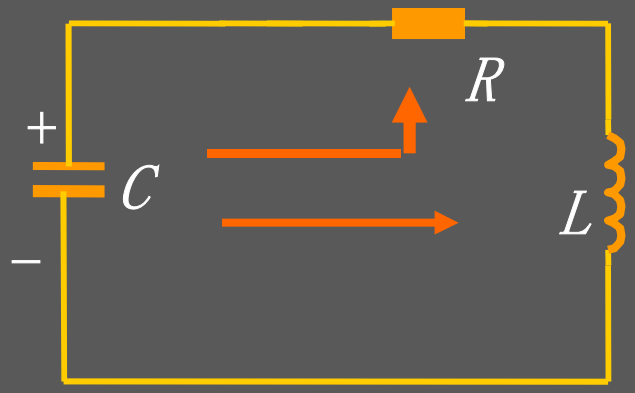
$$(P_1^{\,2} e^{p_1 t} - P_2^{\,2} e^{p_2 t}) = 0 \qquad t = \frac{2\ell n \dfrac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}$$

$$\longrightarrow \qquad t = 2t_m$$

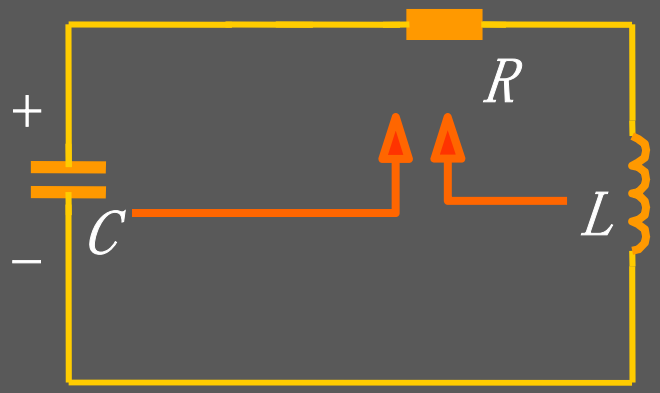
能量转换关系



$0 < t < t_m$　u_c减小，i 增加。



$t > t_m$　u_c减小，i 减小.



(2) $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$P = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$$

特征根为一对共轭复根

令：$\delta = \frac{R}{2L}$ (衰减系数)

则 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

(固有振荡角频率)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ (谐振角频率)

$P = -\delta \pm j\omega$

u_c的解答形式：$u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = e^{-\delta(t)}(A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t})$

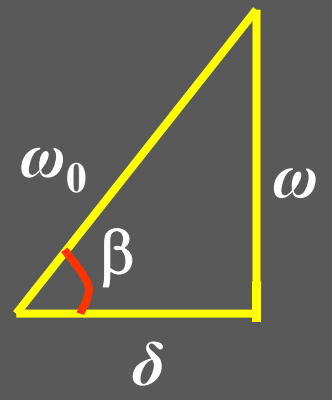
经常写为：$u_c = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$

A，β为待定常数

由初始条件
$$\begin{cases} u_c(0^+) = U_0 \rightarrow A\sin\beta = U_0 \\ \dfrac{du_c}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow A(-\delta)\sin\beta + A\omega\cos\beta = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{U_0}{\sin\beta} \quad , \quad \beta = arctg\frac{\omega}{\delta}$$

ω，ω_0，δ间的关系：



$$\sin\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad A = \frac{\omega_0}{\omega}U_0$$

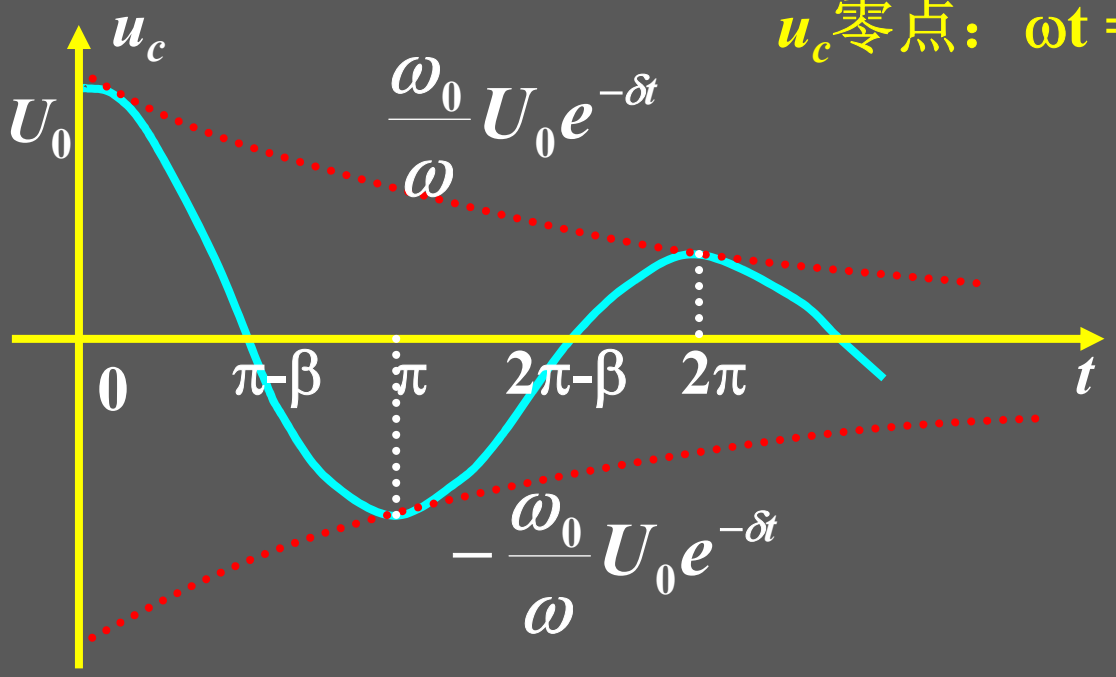
$$u_c = \frac{\omega_0}{\omega}U_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$$

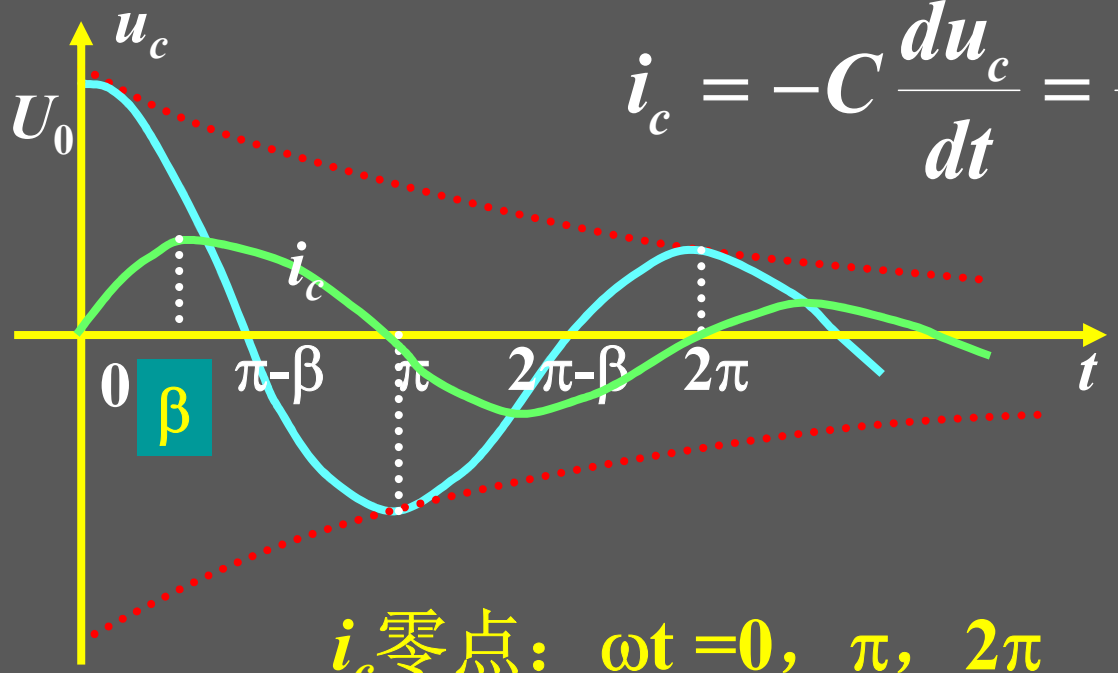
$$u_c = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

u_c是其振幅以$\pm\frac{\omega_0}{\omega}U_0$为包线依指数衰减的正弦函数。

t=0时 u_c=U_0

u_c零点：ωt = π-β，2π-β ... nπ-β





$$i_c = -C\frac{du_c}{dt} = \frac{U_0}{\omega L}e^{-\delta t}\sin\omega t$$

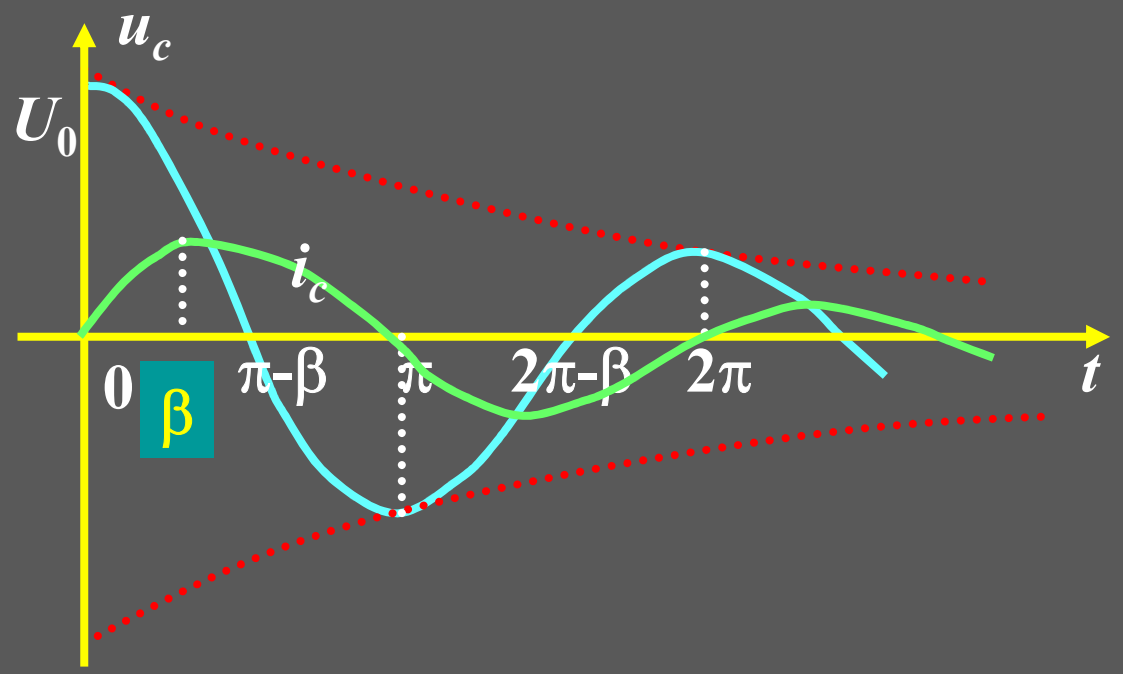
i_c零点：ωt =0，π，2π　... nπ，为 u_c极值点

i_c极值点为u_L零点。

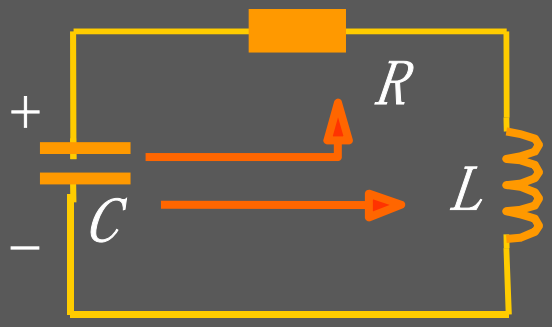
$$u_L = L\frac{di}{dt} = -\frac{\omega_0}{\omega}U_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t-\beta)$$

u_L零点：ωt = β，π+β，2π+β　... nπ+β

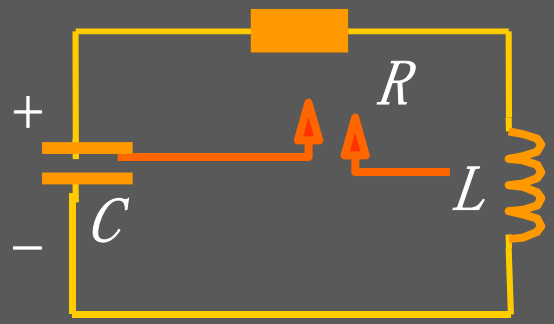
能量转换关系：



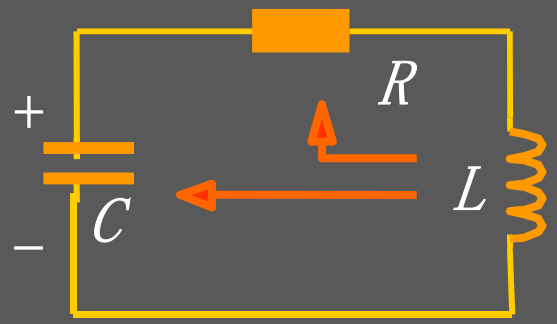
$0 < \omega t < \beta$



$\beta < \omega t < \pi-\beta$



$\pi-\beta < \omega t < \pi$



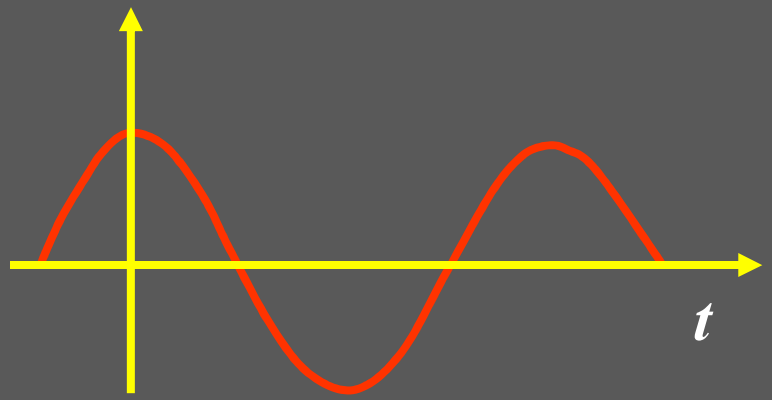
特例：R=0时

则 $\delta = 0$ ， $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ ，$\beta = \dfrac{\pi}{2}$

$$u_c = U_0 \sin(\omega t + 90^0) = u_L$$

$$i = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t$$

→ 等幅振荡



(3) $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$P_1 = P_2 = -\frac{R}{2L} = -\delta$$

$$u_c = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

由初始条件

$$\begin{cases} u_c(0^+) = U_0 \rightarrow A_1 = U_0 \\ \dfrac{du_c}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow A_1(-\delta) + A_2 = 0 \end{cases}$$

解出：

$$\begin{cases} A_1 = U_0 \\ A_2 = U_0\delta \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} u_c &= U_0 e^{-\delta t}(1+\delta t) \\ i_c &= -c\frac{du_c}{dt} = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \\ u_L &= L\frac{di}{dt} = U_0 e^{-\delta t}(1-\delta t) \end{aligned}\right\}$$ 非振荡放电

小结：

$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 过阻尼，非振荡放电 $u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

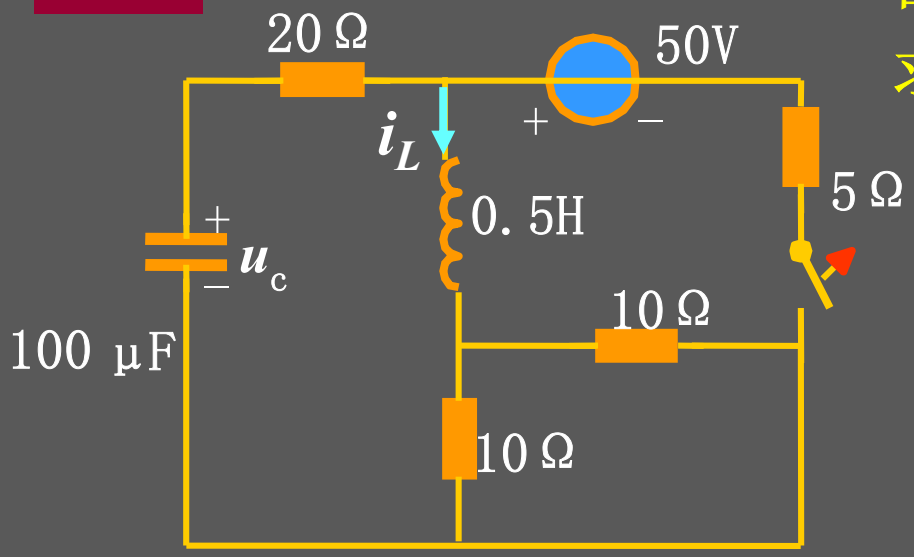
$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 临界阻尼，非振荡放电 $u_c = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$

$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 欠阻尼，振荡放电 $u_c = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$

由初始条件 $\begin{cases} u_c(0^+) \\ \dfrac{du_c}{dt}(0^+) \end{cases}$ 定常数

可推广应用于一般二阶电路

例1.



电路如图，t=0时打开开关。求u_c,并画出其变化曲线。

解 （1） $u_c(0^-)=25V$

$i_L(0^-)=5A$

（2）开关打开为RLC串联电路，方程为：

$$LC\frac{d^2u_c}{dt}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=0$$

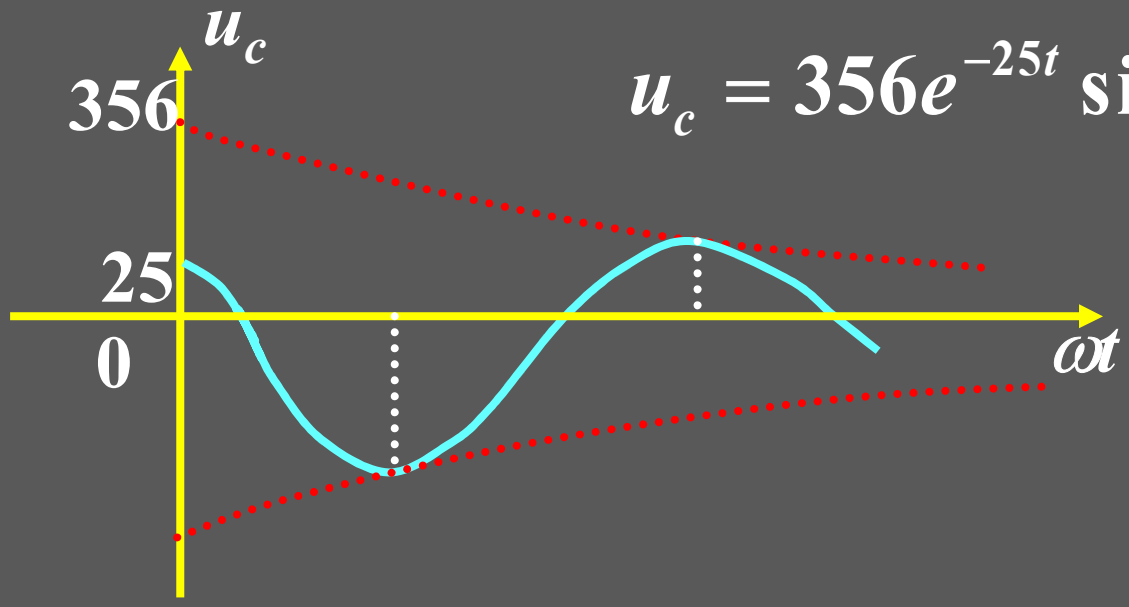
特征方程为： $50P^2+2500P+10^6=0$

$$P=-25\pm j139 \qquad u_c=Ae^{-25t}\sin(139t+\beta)$$

$$u_c = Ae^{-25t}\sin(139t+\beta)$$

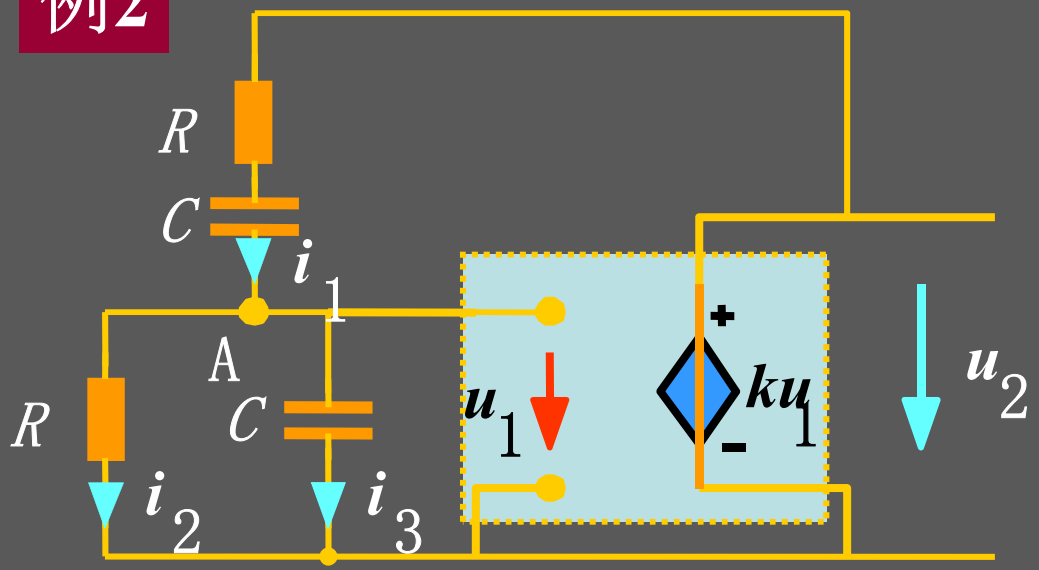
(3) $$\begin{cases} u_c(0^+) = 25 \\ C\left.\dfrac{du_c}{dt}\right|_{0^+} = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\sin\beta = 25 \\ A(139\cos\beta - 25\sin\beta) = \dfrac{-5}{10^{-4}} \end{cases}$$

$$A = 356 \quad , \quad \beta = 176^0$$



$$u_c = 356e^{-25t}\sin(139t+176^0)V$$

例2



左图为RC振荡电路，讨论k取不同值时u_2的零输入响应。

对节点A列写KCL有：$$i_1 = \frac{u_1}{R} + c\frac{du_1}{dt}$$

KVL有：$$R(\frac{u_1}{R} + C\frac{du_1}{dt}) + \frac{1}{C}\int(\frac{u_1}{R} + C\frac{du_1}{dt})dt = u_2 - u_1$$

两边微分整理得：$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + (\frac{3-k}{RC})\frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{R^2C^2} = 0$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+(\frac{3-k}{RC})\frac{du_1}{dt}+\frac{1}{R^2C^2}=0$$

特征方程为：$$P^2+\frac{3-k}{RC}P+\frac{1}{R^2C^2}=0$$

特征根为：$$P=-\frac{3-k}{2RC}\pm\sqrt{(\frac{3-k}{2RC})^2-(\frac{1}{RC})^2}$$

令$\delta=\frac{3-k}{2RC}$，$\omega_0=\frac{1}{RC}$

则$P=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$

(1)$\delta^2 < \omega_0^2$时特征根为一对共轭复数

$$(\frac{3-k}{2RC})^2 < (\frac{1}{RC})^2$$ |3 - k| < 2 ,1 < k < 5为振荡情况

$$u_1 = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$$

$1 < k < 3$ $\delta > 0$ 衰减振荡

$k = 3$ $\delta = 0$ 等幅振荡

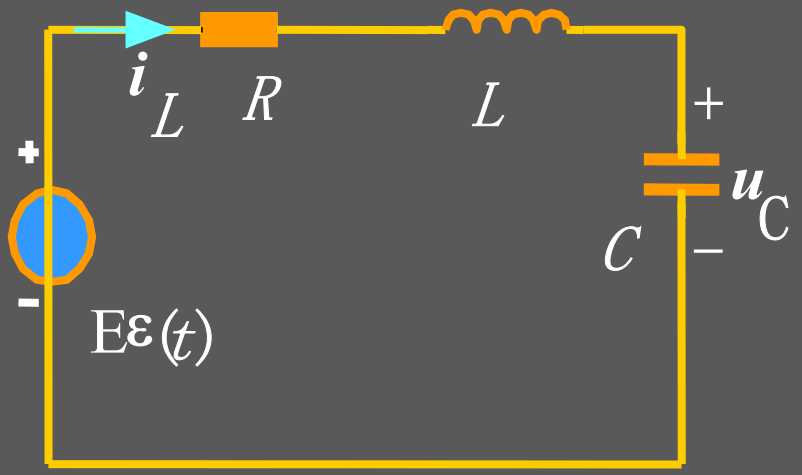
$3 < k < 5$ $\delta < 0$ 增幅振荡

(2) $\delta^2 \geq \omega_0^2$时特征根为两个负实根

$|3-k| \geq 2$ 即 $k \leq 1$ 和$k \geq 5$时为非振荡情况

7.6 二阶电路的零状态响应和全响应

1. 零状态响应



$u_c(0^-)=0 \quad ,i_L(0^-)=0$

微分方程为：

$$LC\frac{d^2u_c}{dt}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=E$$

求通解的特征方程为：

$$LCP^2+RCP+1=0$$

$$u_c=u_c^{'}+u_c^{''}$$

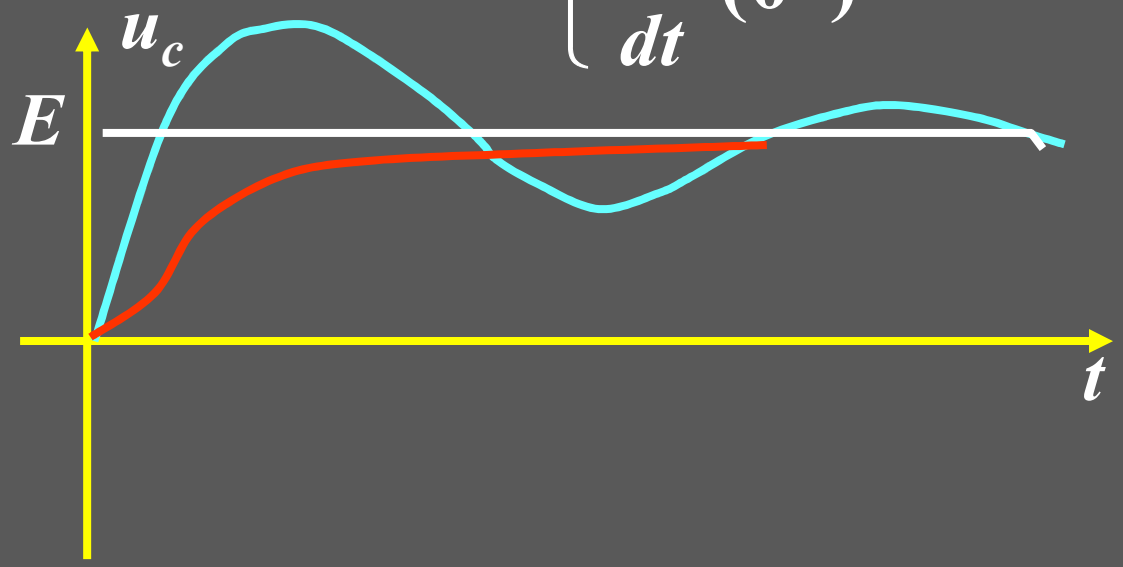
通解　　特解

特解：　$u_c^{''}=E$

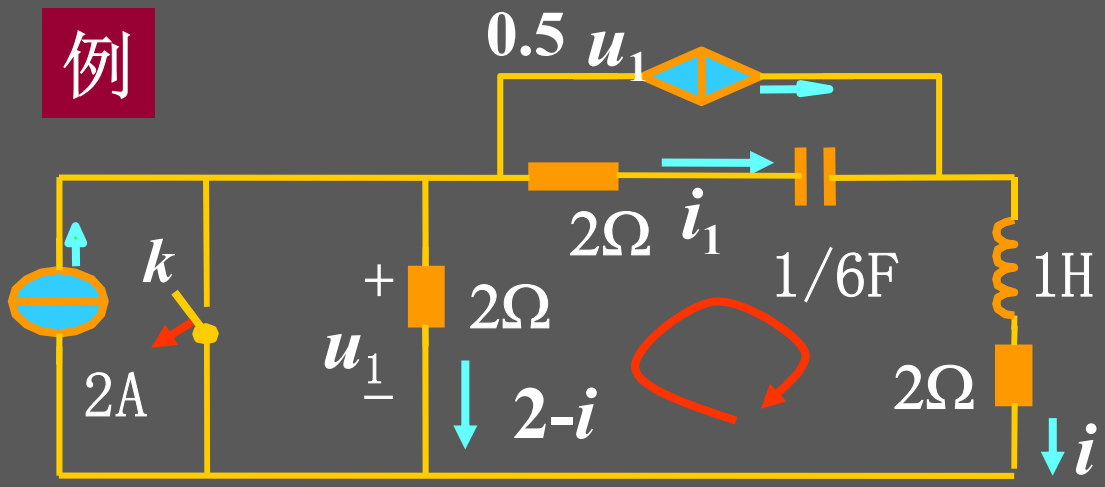
u_c解答形式为：

$$\begin{cases} u_c = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} & (p_1 \neq p_2) \\ u_c = E + A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t} & (P_1 = P_2 = -\delta) \\ u_c = E + A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) & (P_{1,2} = -\delta \pm j\omega) \end{cases}$$

由初值 $\begin{cases} u_c(0^+) \\ \dfrac{du_c}{dt}(0^+) \end{cases}$ 确定二个常数



例



求所示电路 i 的零状态响应。

解

第一步列写微分方程

$$i_1 = i - 0.5u_1 = i - 0.5(2 - i)\times 2 = 2i - 2$$

由KVL：

$$2(2-i) = 2i_1 + 6\int i_1 dt + \frac{di}{dt} + 2i$$

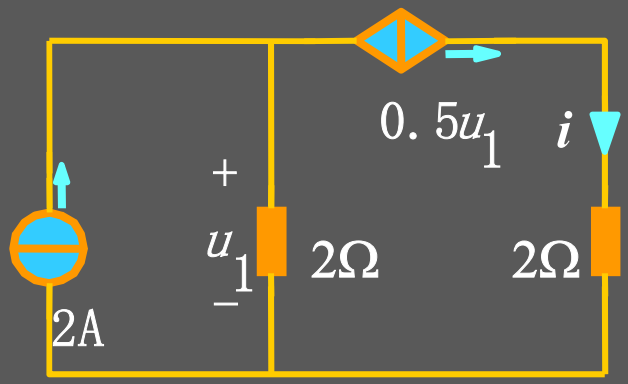
整理得：

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 8\frac{di}{dt} + 12i = 12$$

二阶非齐次常微分方程

$$\frac{d^2i}{dt^2}+8\frac{di}{dt}+12i=12$$

稳态模型



解答形式为：　$i=i'+i''$

第二步求通解i'

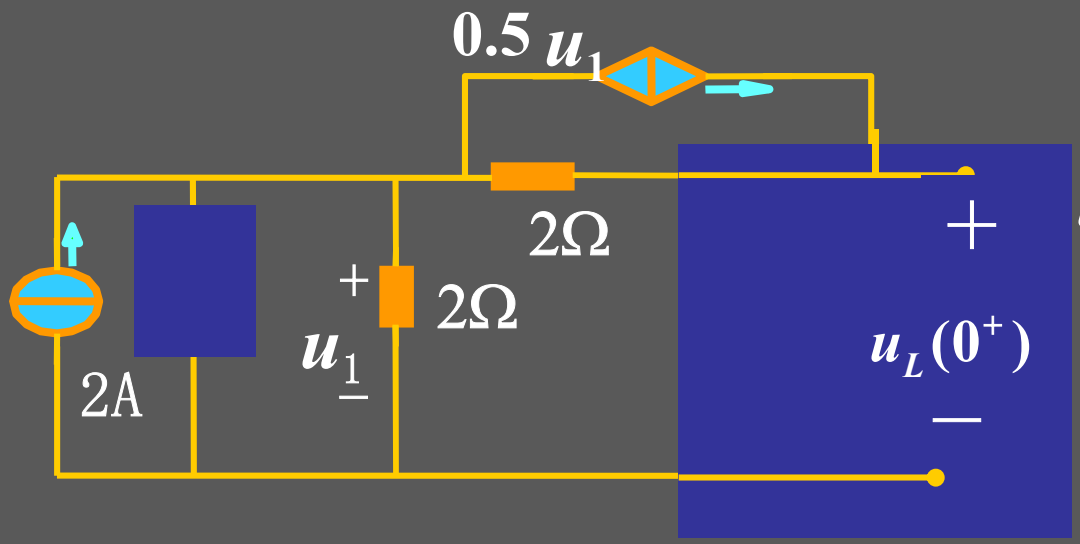
特征根为：　$P_1=-2$ ，$P_2=-6$

$$i'=A_1e^{-2t}+A_2e^{-6t}$$

第三步求特解 i''

由稳态模型有：　$i=0.5\,u_1$　　$u_1=2(2-0.5u_1)$

→　$u_1=2$　　$i=1\text{A}$



第四步定常数

$$i = 1 + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

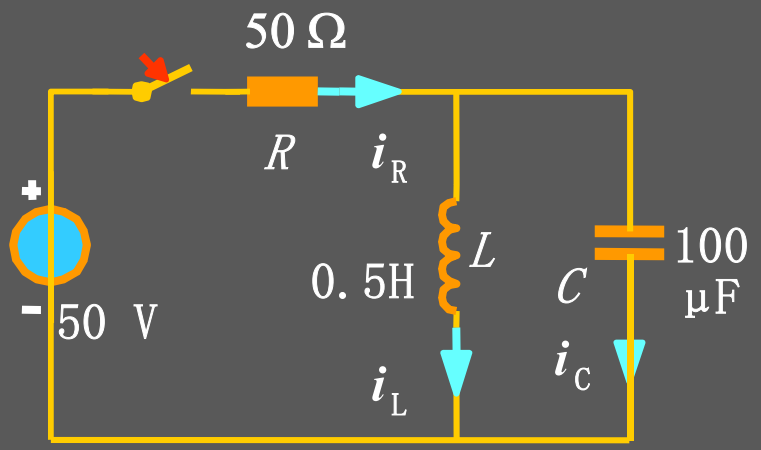
$$\begin{cases} i(0^+) = i(0^-) = 0 \\ L\dfrac{di}{dt}(0^+) = u_L(0^+) \end{cases}$$

由0^+电路模型：$u_L(0^+) = 0.5u_1 \times 2 + u_1 = 2u_1 = 8V$

$$\begin{cases} 0 = 1 + A_1 + A_2 \\ 8 = -2A_1 - 6A_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = 0.5 \\ A_2 = -1.5 \end{cases}$$

$$\therefore i = 1 + 0.5e^{-2t} - 1.5e^{-6t} \quad \text{A}$$

2 二阶电路的全响应



已知：$i_L(0)=2A$　$u_c(0)=0$

求：i_L，i_R。

解　(1) 列微分方程

节点法：
$$\frac{L\dfrac{di}{dt}-50}{R}+i_L+LC\frac{d^2i_L}{dt^2}=0$$

$$RLC\frac{d^2i_L}{dt^2}+L\frac{di}{dt}+Ri_L=50$$

(2)求特解　$i_L''=1A$

$$RLC\frac{d^2 i_L}{dt^2}+L\frac{di}{dt}+Ri_L=50$$

(3)求通解

特征方程为：$P^2+200P+20000=0$

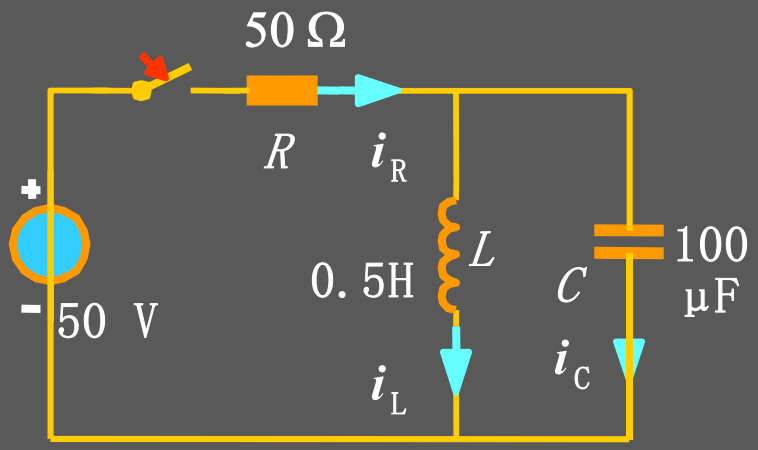
特征根为：$P=-100\pm j100$

$$\therefore i=1+Ae^{-100t}\sin(100t+\varphi)$$

(4)定常数

$$\begin{cases}1+A\sin\varphi=2 & \leftarrow i_L(0^+)\\ 100A\cos\varphi-100A\sin\varphi=0 & \leftarrow u_L(0^+)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi=45^\circ\\ A=\sqrt{2}\end{cases}\qquad \therefore i_L=1+\sqrt{2}e^{-100t}\sin(100t+45^\circ)$$

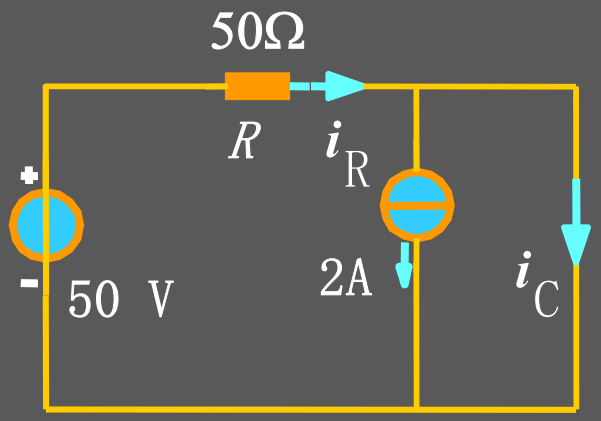


(5)求i_R

$$i_R = i_L + i_C$$

$$= i_L + LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}$$

或设解答形式为：$i_R = 1 + Ae^{-100t}\sin(100t + \varphi)$



定常数

$$\begin{cases} i_R(0^+) = 1 \quad i_C(0^+) = -1 \\ \dfrac{di_R}{dt}(0^+) = ? \end{cases}$$

$$i_R = \frac{50 - u_c}{R}$$

$$\frac{di_R}{dt}(0^+) = -\frac{1}{R}\frac{du_c}{dt}(0^+) = -\frac{1}{RC}i_c(0^+) = 200$$

$$i_R = 1 + Ae^{-100t}\sin(100t + \varphi)$$

$$\begin{cases} 1 + A\sin\varphi = 1 \\ 100A\cos\varphi - 100A\sin\varphi = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ A = 2 \end{cases}$$

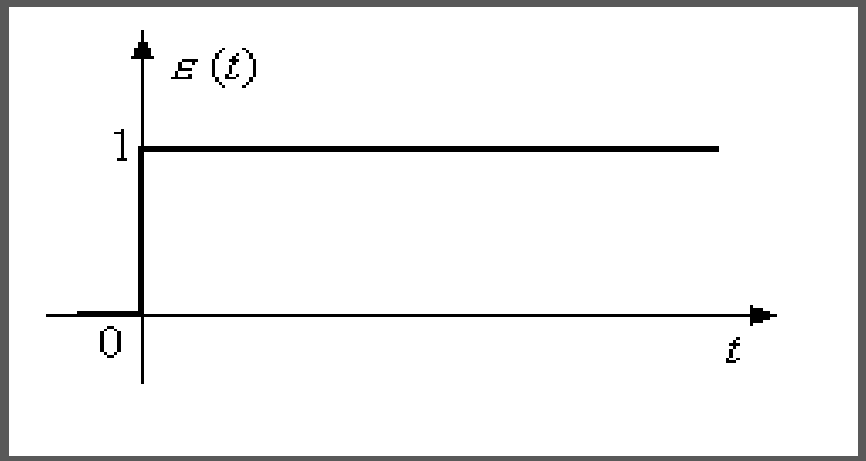
7.7一阶电路和二阶电路的阶跃响应

一、单位阶跃响应：

单位阶跃函数输入的零状态响应

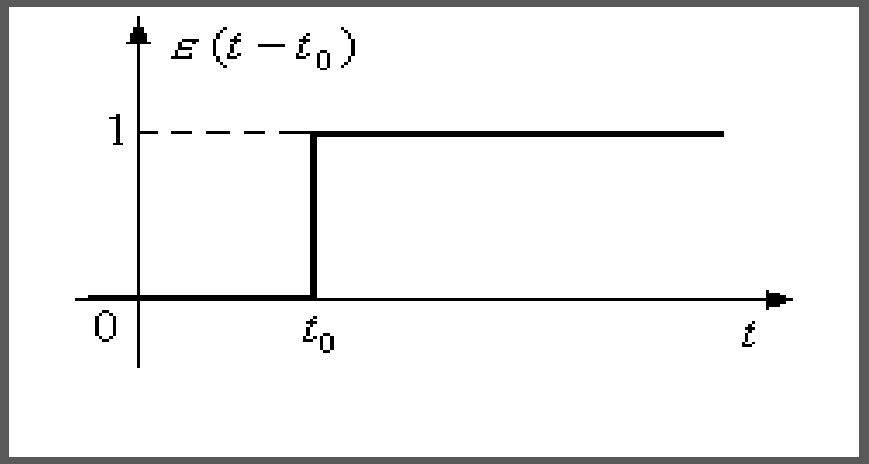
1．单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t\le 0_-\\ 1 & t\ge 0_+\end{cases}$$

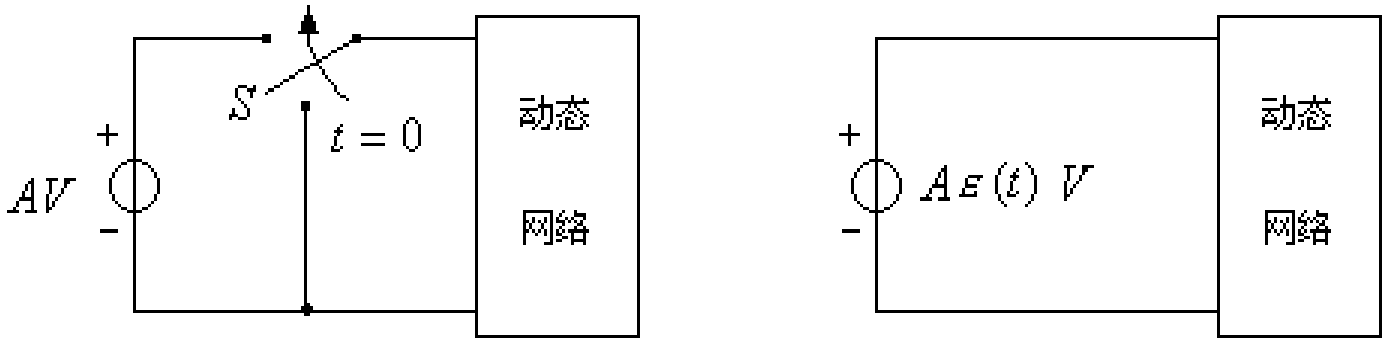


延时单位阶跃函数 $\varepsilon(t-t_0)$

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\le t_{0-}\\ 1 & t\ge t_{0+}\end{cases}$$

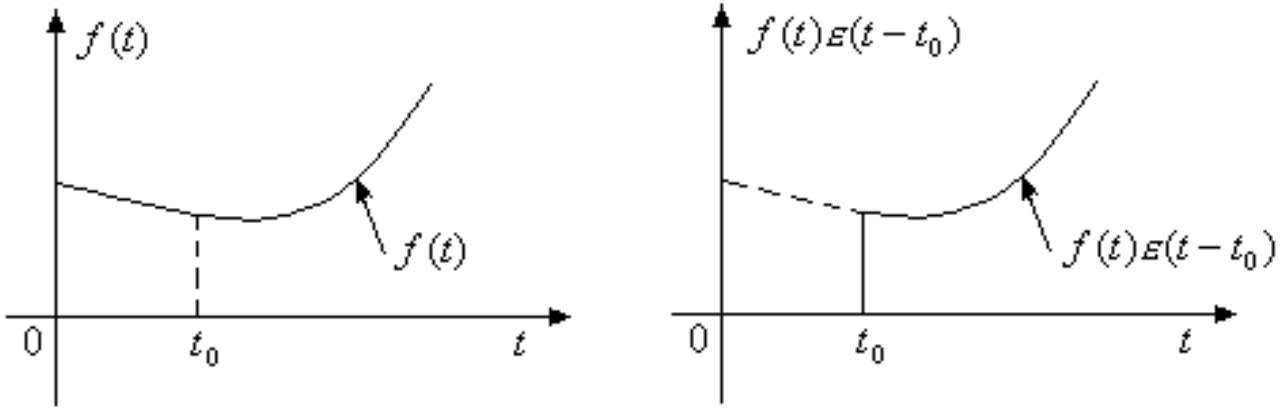


2 . 阶跃函数表示电源作用



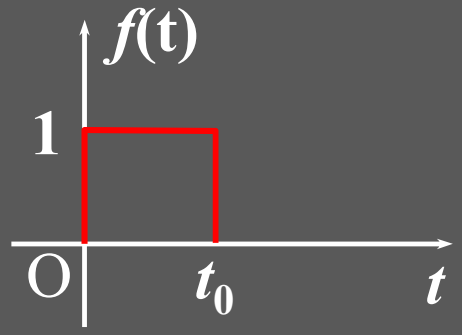
3. 阶跃函数可用来“起始”任意一个 f (t)

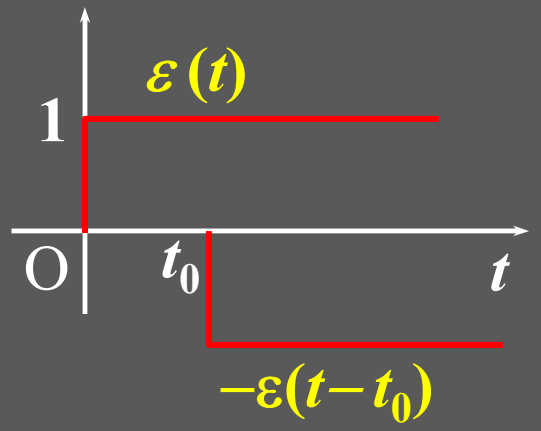
$$f(t)\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases} f(t) & t \geq t_{0+} \\ 0 & t \leq t_{0-} \end{cases}$$



4 .阶跃函数和延时阶跃函数可表示分段常量信号、脉冲串等

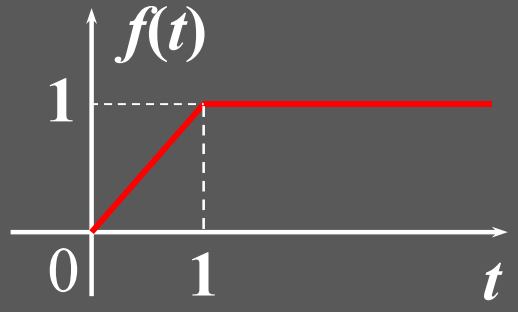
例1





$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

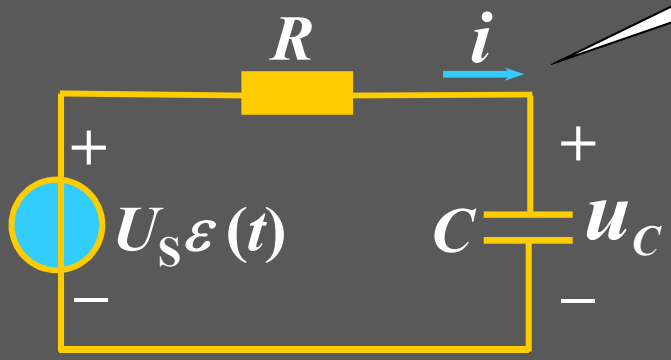
例2



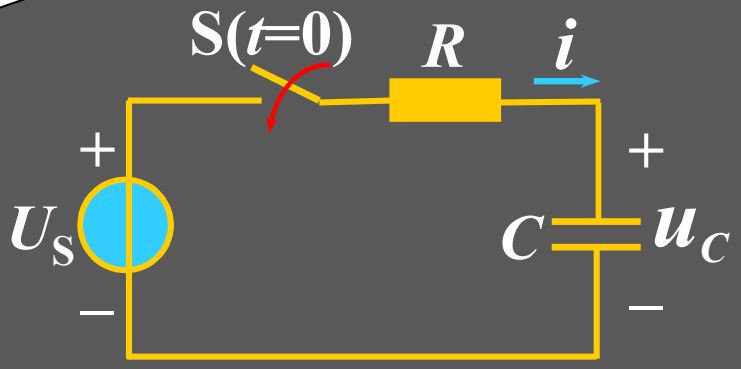
$$f(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+\varepsilon(t-1)$$

二、 阶跃响应

零状态响应

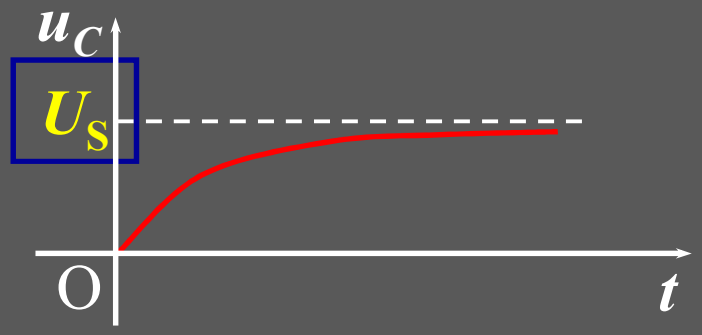


$u_C(0^-)=0$

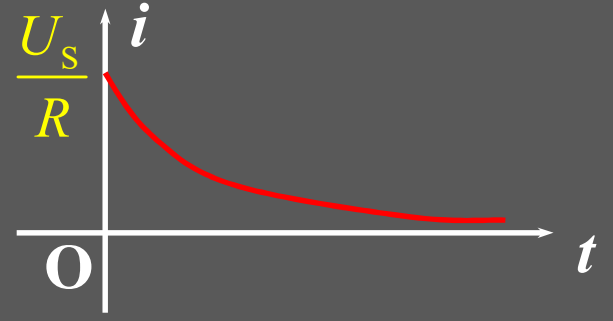


$u_C(0^-)=0$

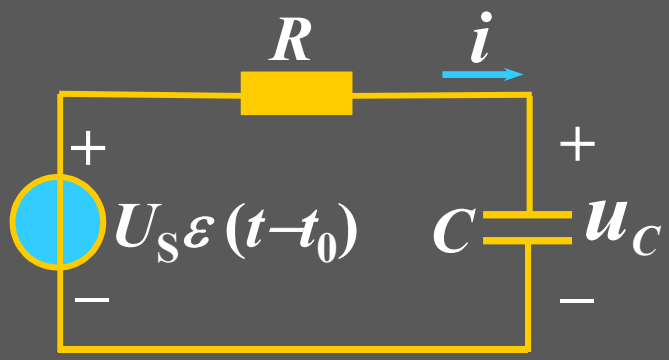
$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$



$$i = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

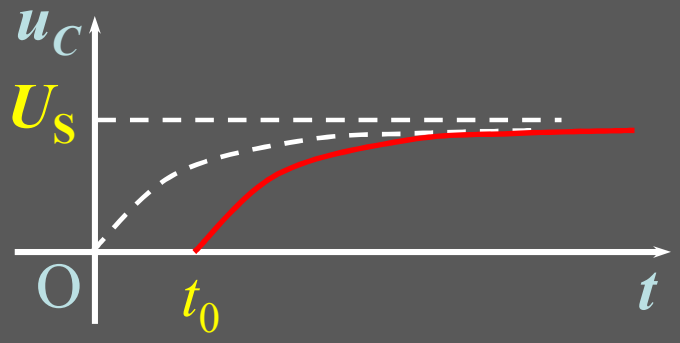


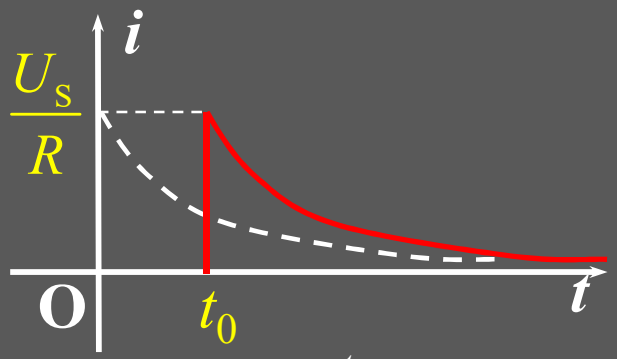
延时阶跃响应



$u_C(t_0^-)=0$

激励在$t=t_0$时加入，
则响应从$t=t_0$开始。





$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t-t_0}{RC}})\varepsilon(t-t_0)$$

$$i = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$i = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\varepsilon(t-t_0)$$

注意：

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t-t_0}{RC}})\varepsilon(t-t_0)$$

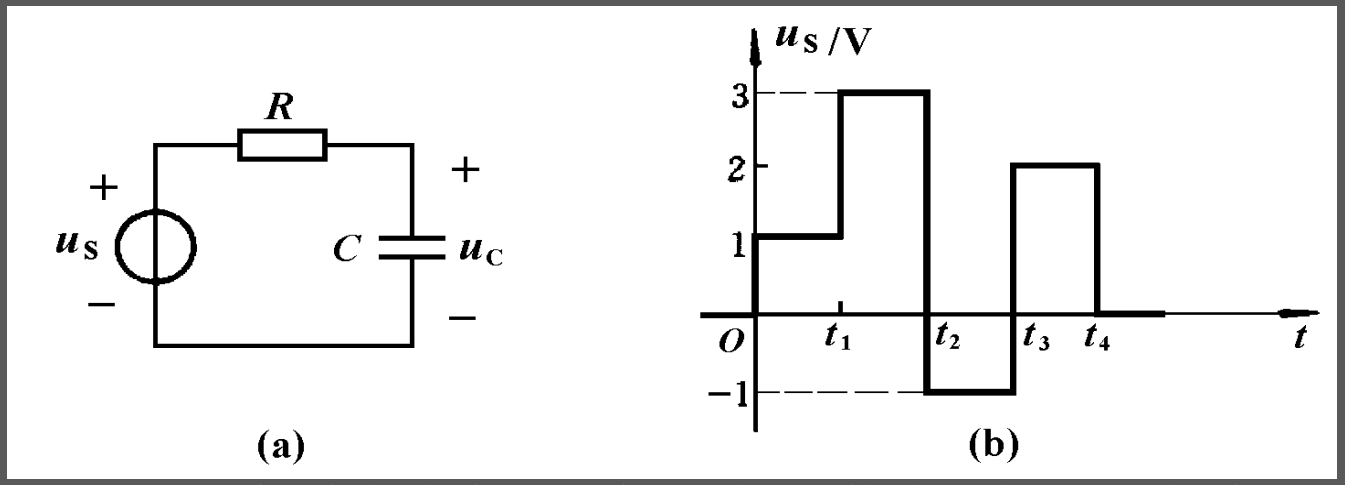
$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

二者的区别！

结论： 零状态网络的阶跃响应为 $y(t)\varepsilon(t)$ 时，

则延时t_0的阶跃响应为 $y(t-t_0)\ \varepsilon(t-t_0)$.

例



图示 *RC*串联电路在分段恒定信号激励下的零状态响应

$$u_S(t)=\varepsilon(t)+2\varepsilon(t-t_1)-4\varepsilon(t-t_2)+3\varepsilon(t-t_3)-2\varepsilon(t-t_4)$$

其电容电压$u_C(t)$的零状态响应可以表示为

$$u_C(t)=s(t)+2s(t-t_1)-4s(t-t_2)+3s(t-t_3)-2s(t-t_4)$$

其中 $s(t)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$

$s(t-t_1)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-t_1}{RC}})\varepsilon(t-t_1)$

$s(t-t_2)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-t_2}{RC}})\varepsilon(t-t_2)$

$s(t-t_3)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-t_3}{RC}})\varepsilon(t-t_3)$

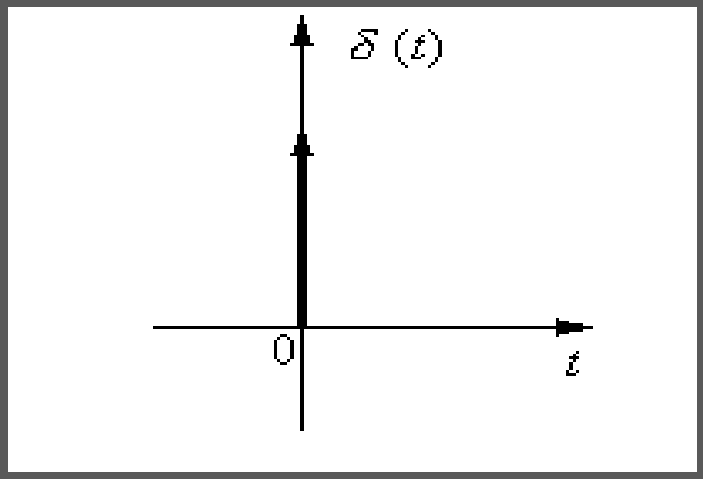
$s(t-t_4)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-t_4}{RC}})\varepsilon(t-t_4)$

7.8 一阶电路和二阶电路的冲激响应

一. 冲激函数

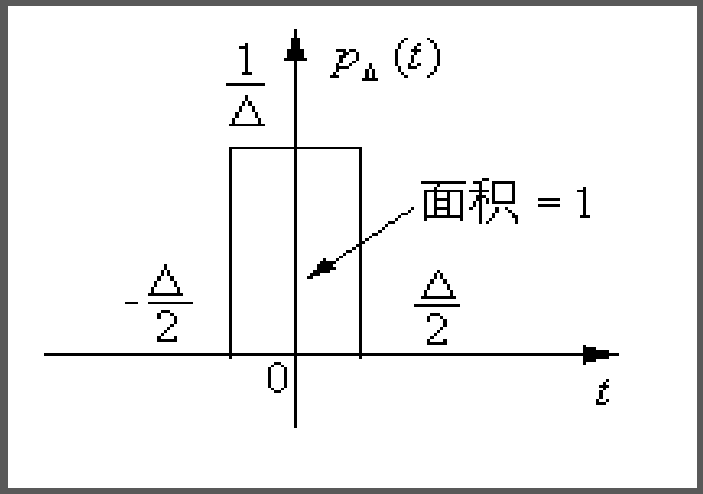
1 . 单位冲激函数$\delta(t)$ 是一种奇异函数，又称为狄拉克（*Dirac*）函数

$$\begin{cases}\delta(t)=0 & \forall\ t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\end{cases}$$



2 . 单位脉冲函数 $p_\Delta(t)$

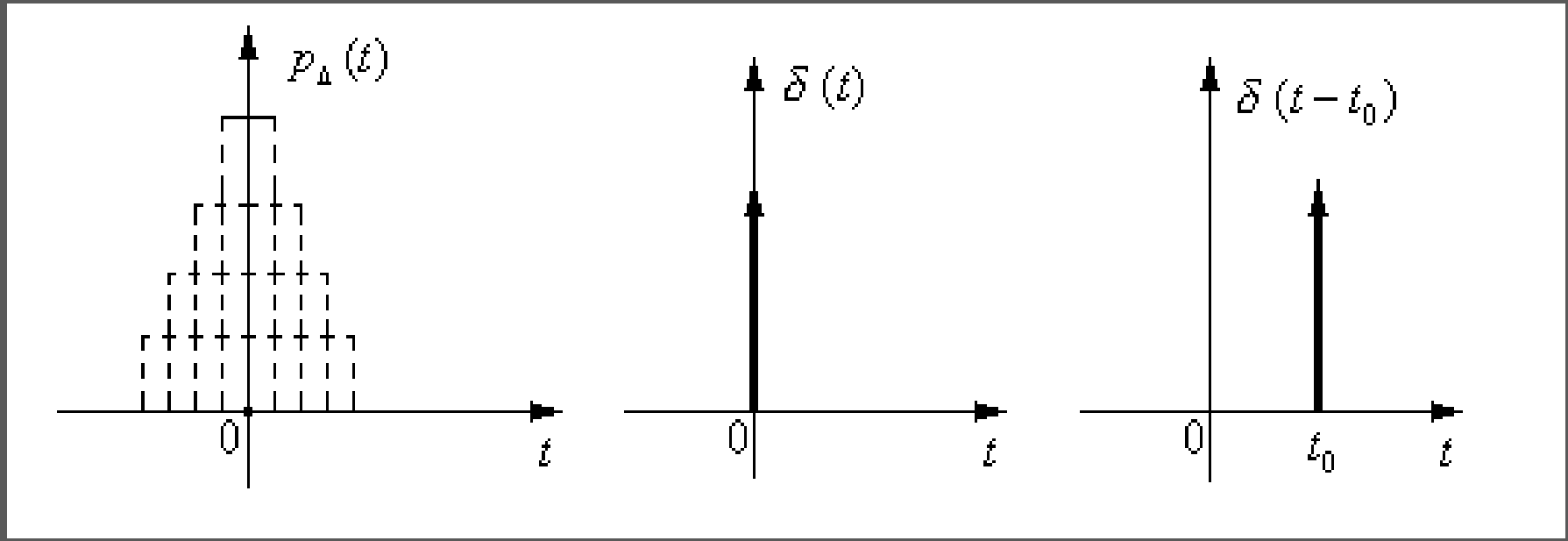
$$p_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<-\dfrac{\Delta}{2}\ \text{或}\ t>\dfrac{\Delta}{2}\\ \dfrac{1}{\Delta} & -\dfrac{\Delta}{2}<t<\dfrac{\Delta}{2}\end{cases}$$



① 脉冲函数 $Kp_\Delta(t)$ 所围的面积为K，其高度为 K/Δ

② $\delta(t)$函数可看成单位脉冲函数 $p_\Delta(t)$ 的一种极限, 当一个单位脉冲函数的宽度变得越来越窄时,它的幅度越来越大，当 $\Delta\to 0$ 时，幅度就变为无限大，但其面积仍为1；

③ $\delta(t)$函数是用一种集中的（离散的）瞬时作用的效应来代替一种平均的持续作用的效应；



④ 冲激函数 $\delta(t)$ 是一种理想化的波形，是一种宽度极为窄小但具有极大幅度的脉冲波形的近似，$\delta(t)$ 函数可以严格地用“广义函数”的概念来理解。

3 . 单位延时冲激函数

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 & \forall \quad t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \end{cases}$$

二. 冲激函数的性质

1 . 冲激函数是阶跃函数的导数

$$\because \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)\,d\xi = \varepsilon(t)$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t)$$

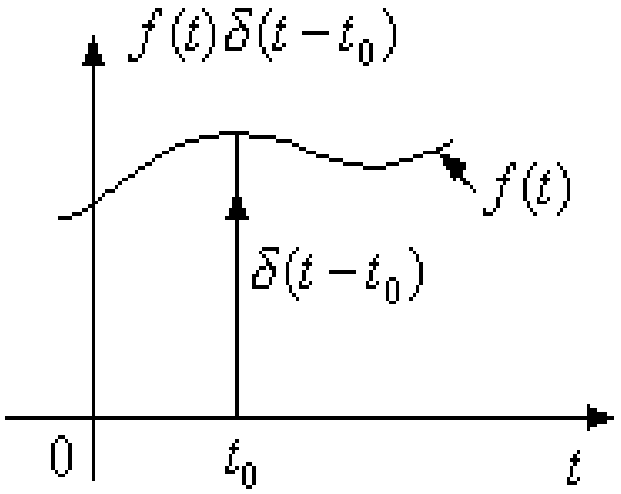
2．筛分性

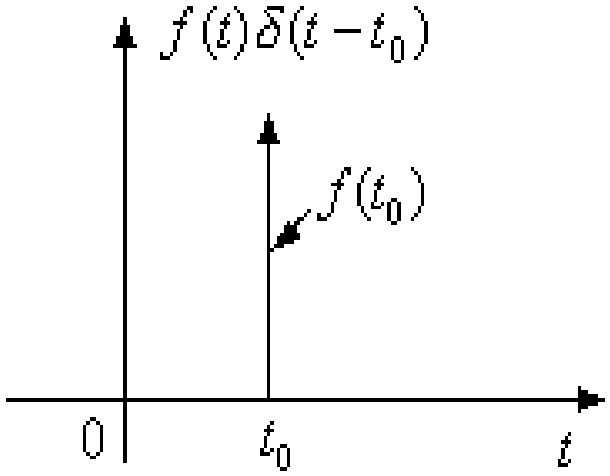
$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$



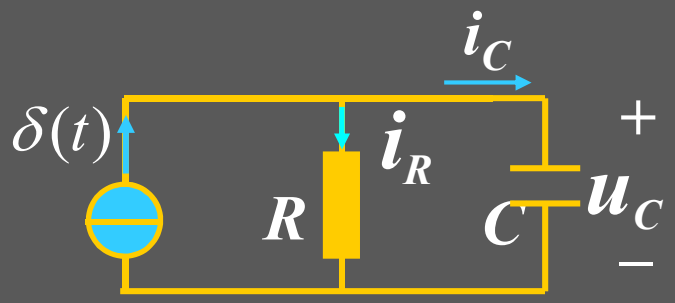


3 单位阶跃函数与单位冲激函数之间存在以下关系

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\xi)\mathrm{d}\xi$$

三、RC电路冲激响应



$u_C(0_-)=0$

1.为零状态响应 $u_C(0_-)=0$

$$i_C+i_R=\delta(t)$$

$$\frac{1}{R}u_C+C\frac{du_C}{dt}=\delta(t)$$

$$\int_{0_-}^{0_+}\frac{1}{R}u_C dt+\int_{0_-}^{0_+}C\frac{du_C}{dt}dt=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt$$

$=0$

$$C\left[u_C(0_+)-u_C(0_-)\right]=1$$

$$\therefore u_C(0_+)=\frac{1}{C}$$

u_C可不可能是冲激函数?

证明:设 $u_C=k\delta(t)$

$$i_R=\frac{u_C}{R}=\frac{k}{R}\delta(t)$$

$$i_C=C\frac{du_C}{dt}=C\delta'(t)$$

***KCL*方程不成立**

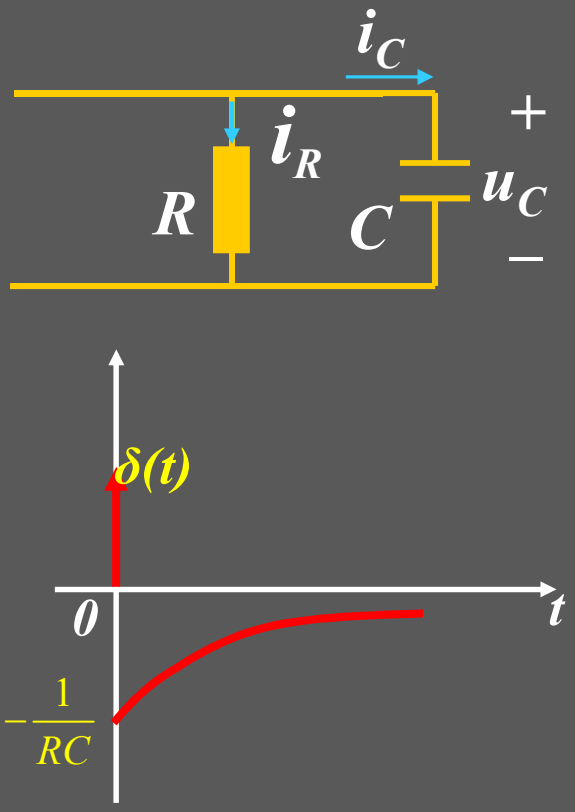
u_C不会是冲激函数

∴ 在冲激激励下 $u_C(0_+) \neq u_C(0_-)$

$$q = Cu_C(0_+) = 1$$

即：在δ(*t*)作用下，有一单位电荷转移到电容上,使u_C发生了跃变

2. $t \geq 0_+$后δ(t)=0,所以可视为$u_C(0_+)=1/C$的零输入响应



$$u_C(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t) \qquad (\tau = RC)$$

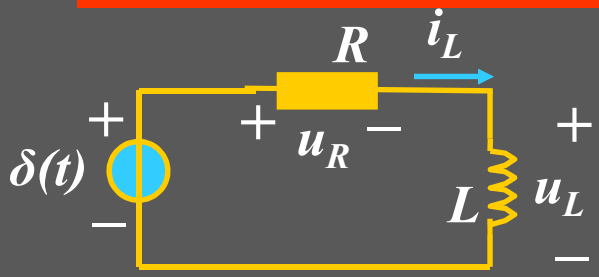
$$i_C(t) = C\frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t) + e^{-\frac{t}{\tau}} \delta(t)$$

$$= \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t)$$

$$i_C = \delta(t) - i_R = \delta(t) - \frac{1}{R} u_c$$

$$= \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t)$$

四、RL电路冲激响应



$\therefore \quad i_L(0_+)=\dfrac{1}{L}$ **ψ=Li=1,产生单位磁通链**

1.零状态响应

$$i_L(0_-)=0$$

$$u_R+u_L=\delta(t)$$

$$Ri_L+L\frac{di_L}{dt}=\delta(t)$$

$$\int_{0_-}^{0_+}Ri_L dt+\int_{0_-}^{0_+}L\frac{di_L}{dt}dt=1$$

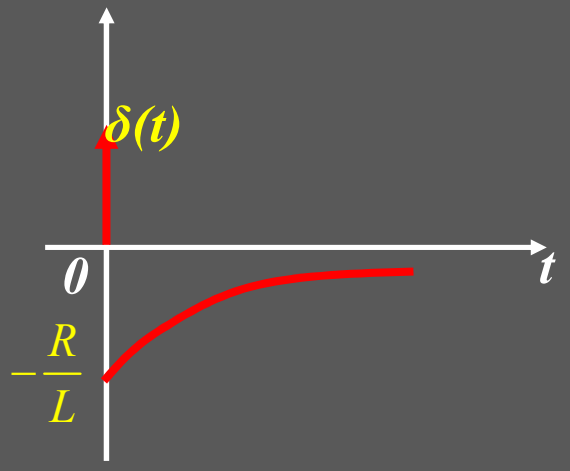
$\int_{0_-}^{0_+}Ri_L dt$ **=0**

$$L\left[i_L(0_+)-i_L(0_-)\right]=1$$

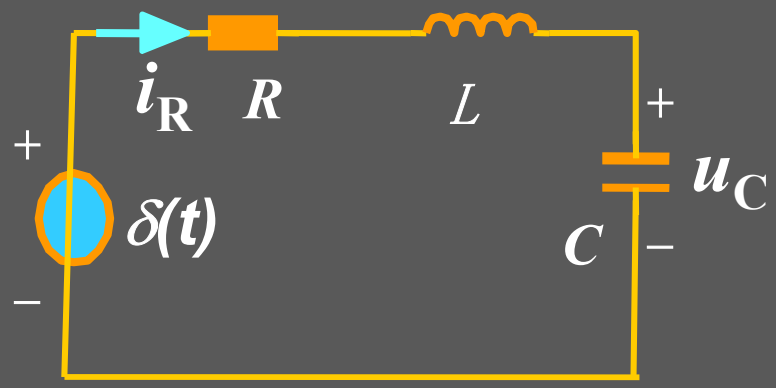
2.零输入响应

$$i_L(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t) \qquad \tau=\frac{L}{R}$$

$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=-\frac{R}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)+\delta(t)$$



五、二阶电路的冲激响应



定量分析，方程为:

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=\delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+}LC\frac{d^2u_c}{dt^2}dt+\int_{0^-}^{0^+}RC\frac{du_c}{dt}dt+\int_{0^-}^{0^+}u_c dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt$$

$RC\frac{du_c}{dt}$ 有限值

u_c 有限值

t 在0^-至0^+间

$$\int_{0^-}^{0^+}LC\frac{d^2u_c}{dt^2}dt=1$$

$$LC\frac{du_c}{dt}(0^+)-LC\frac{du_c}{dt}(0^-)=1$$

$$LC\frac{du_c}{dt}(0^+)-LC\frac{du_c}{dt}(0^-)=1$$

$$\longrightarrow \quad i_L(0^+)=i_C(0^+)=\frac{1}{L}$$

$t>0^+$为零输入响应

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=0$$

$$R>2\sqrt{\frac{L}{C}} \longrightarrow u_c=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}$$

$$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ A_1P_1+A_2P_2=\dfrac{1}{LC} \end{cases}$$

$$A_2=-A_1=\frac{\frac{1}{LC}}{P_2-P_1}$$

$$u_c = \frac{-1}{LC(P_2 - P_1)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})\varepsilon(t)$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (P_{1,2} = -\delta \pm j\omega)$$

$$u_c = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$$

$$u_c = \frac{1}{\omega LC}e^{-\delta t}\sin(\omega t)\varepsilon(t)$$

五、阶跃响应与冲激响应的关系

对于任一线性时不变电路

激励　零状态响应

$$e(t) \to r(t)$$

$$e'(t) \to r'(t)$$

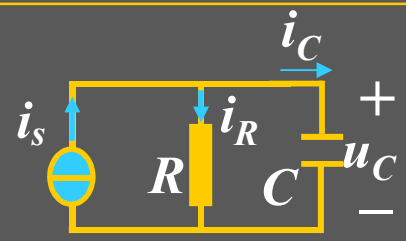
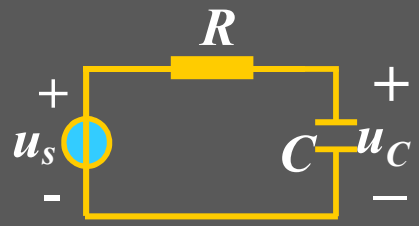
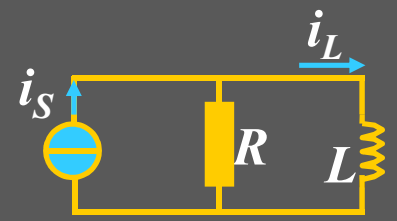
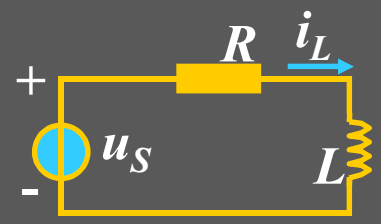
$$\int e(t)dt \to \int r(t)dt$$

设　$\varepsilon(t) \to s(t)$

$\delta(t) \to h(t)$

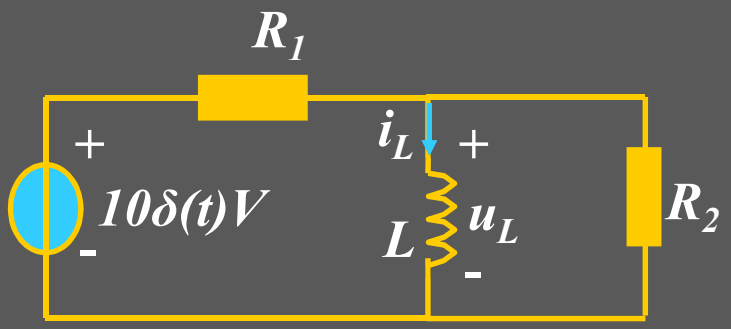
由　$\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t)$　　$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = \varepsilon(t)$

有　$\dfrac{ds(t)}{dt} = h(t)$　　$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} h(t)dt = s(t)$

电　　路	零 状 态 响 应	
	阶跃响应**s(t)**	冲激响应**h(t)**
	$i_S(t)=\varepsilon(t)$ $u_C=R(1-e^{-t/\tau})\varepsilon(t)$	$i_S(t)=\delta(t)$ $u_C=\frac{1}{C}e^{-t/\tau}\varepsilon(t)$
	$u_S(t)=\varepsilon(t)$ $u_C=(1-e^{-t/\tau})\varepsilon(t)$	$u_S(t)=\delta(t)$ $u_C=\frac{1}{RC}e^{-t/\tau}\varepsilon(t)$
	$i_S(t)=\varepsilon(t)$ $i_L(t)=\left(1-e^{-t/\tau}\right)\varepsilon(t)$	$i_S(t)=\delta(t)$ $i_L=\frac{R}{L}e^{-t/\tau}\varepsilon(t)$
	$u_S(t)=\varepsilon(t)$ $i_L=\frac{1}{R}(1-e^{-t/\tau})\varepsilon(t)$	$u_S(t)=\delta(t)$ $i_L=\frac{1}{L}e^{-t/\tau}\varepsilon(t)$

例 如图所示电路中，$i_L(0_-)=0$，$R_1=6\Omega$，$R_2=4\Omega$，$L=100mH$。

求冲激响应i_L和u_L。



解：$Ri_L + L\dfrac{di_L}{dt} = 4\delta(t)$

$$\int_{0_-}^{0_+} Ri_L dt + \int_{0_-}^{0_+} L\frac{di_L}{dt}dt = 4$$

$$L\left[i_L(0_+) - i_L(0_-)\right] = 4$$

$$i_L(0_+) = \frac{4}{L} = 40A$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{L}{R_1 // R_2} = \frac{1}{24}s$$

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-t/\tau} = 40e^{-24t}A \qquad t \geq 0_+$$

或 $i_L(t) = 40e^{-24t}\varepsilon(t)A$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -96e^{-24t}\varepsilon(t)V$$

求导过程先不管$\varepsilon(t)$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -96e^{-24t}\varepsilon(t) + 4e^{-24t}\delta(t)V$$

$t \geq 0_+$后$\delta(t)=0$

本章小结

1.换路定理

在电路理论中， 通常把电路状态的改变（如通电、断电、短路、电信号突变、电路参数的变化等），统称为换路。换路前后瞬间，电感电流、电容电压不能突变，称为换路定律。即：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

利用换路定律和0_+等效电路，可求得电路中各电流、电压的初始值。

2.一阶电路的零输入响应

零输入响应就是无电源一阶线性电路，在初始储能作用下产生的响应。其形式为：

$$f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中，$f(0_+)$是响应的初始值，τ是电路的时间常数。

3. 一阶电路的零状态响应

零状态响应就是电路初始状态为零时由输入激励产生的响应。其形式为：

$$f(t) = f(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

式中，$f(\infty)$是响应的稳态值。

4.一阶电路的全响应

全响应就是初始状态不为零的电路在输入恒定直流激励下产生的响应。其两种分解为：

$$f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

(零输入响应)　　(零状态响应)

$$f(t) = [\ f(0_+) - f(\infty)\ ]e^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty)$$

(暂态响应)　　(稳态响应)

5.一阶电路的三要素法

一阶电路的响应$f(t)$,由初始值$f(0_+)$、稳态值$f(\infty)$和时间常数τ三要素所确定，利用三要素公式可以简便地求解一阶电路在直流电源作用下的电路响应。全响应表达式为：

$$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

计算响应变量的初始值$f(0_+)$和稳态值$f(\infty)$，分别用$t=0_+$时的电路和$t=\infty$时的电路解出。作$t=0_+$时的电路，将$u_C(0_+)$和$i_L(0_+)$分别视为电压源和电流源。作$t=\infty$时的电路，电容相当于开路、电感相当于短路。时间常数τ中的电阻R，是动态元件两端电路的戴维南等效电路电阻。

(1) 二阶电路含二个独立储能元件，是用二阶常微分方程所描述的电路。

(2) 二阶电路的性质取决于特征根，特征根取决于电路结构和参数，与激励和初值无关。

$$p = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$\delta > \omega_0$ 过阻尼，非振荡放电 $u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

$\delta = \omega_0$ 临界阻尼，非振荡放电 $u_c = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$

$\delta < \omega_0$ 欠阻尼，振荡放电 $u_c = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$

(3) 求二阶电路全响应的步骤

(a) 列写$t>0^+$电路的微分方程

(b) 求通解

(c) 求特解

(d) 全响应=强制分量+自由分量

(e)由初值 $\left.\begin{matrix} f(0^+) \\ \dfrac{df}{dt}(0^+) \end{matrix}\right\rangle$ 定常数

(4) 一阶电路是单调的响应，可用时间常数τ表示过渡过程的时间。

(5) 二阶电路用三个参数δ，ω和ω_0来表示动态响应。满足：

$$P=-\delta\pm j\omega \qquad \omega^2=\omega_0^2-\delta^2$$

特征根	响应性质	自由分量形式
$R=0$ 共轭虚根	等幅振荡(无 阻尼)	$K\sin(\omega_0 t+\beta)$
$R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 共轭复根	衰减振荡(欠阻尼)	$Ke^{-\delta t}\sin(\omega t+\beta)$ 或$e^{-\delta t}(A\sin\omega t+B\cos\omega t)$
$R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 相等的实根	非振荡放电(临界阻尼)	$e^{-\delta t}(A_1+A_2 t)$
$R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 不等的实根	非振荡放电 (过阻尼)	$A_1e^{p_1 t}+A_2e^{p_2 t}$

(6) 电路是否振荡取决于特征根，特征根仅仅取决于电路的结构和参数，而与初始条件和激励的大小没有关系。